达州市普通高中2024届第一次诊断性测试

理科数学参考答案

一、选择题：

1. B　2. A　3.C　4.C　5.A　6.A　7.B　8. C　9. B　10.C　11.B　12. C

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. $\frac{3\pi}{4}$（答案在$\left[\frac{\pi}{2},\pi\right)$内均可）　14. 4　15. 0　16. 92

三、解答题：共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17．解：(1) $(0.020+0.010)\times10\times40=12$，∴产值小于610万元的调研城市个数为12.

根据频率分布直方图得中位数为$610+5=615$.

(2) 40个城市中任取1个，产值超过600万元的频率为$(1-0.02)\times10=0.8$.

设从全球应用北斗卫星的城市中任取5个城市，求恰有2个城市的产值超过600万元为事件A，

$\therefore P(A)=C_5^2\times(\frac{4}{5})^2(\frac{1}{5})^3=\frac{32}{625}$.

所以恰有2个城市的产值超过600万元的概率为$\frac{32}{625}$.

18．解：(1) $\because a^2-b^2+c^2=2$，　$\therefore b^2=a^2+c^2-2$，

又$\because b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，　$\therefore ac\cos B=1$. ………………①

$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{2}}{4}$，　$\therefore ac\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$. ………………②

∴由①②得$\tan B=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2) 由$\tan B=\frac{\sqrt{2}}{2}$得$\sin B=\frac{\sqrt{3}}{3}$，由$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}=1\times\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$，

$\therefore a=\sqrt{3}\sin A$，　$c=\sqrt{3}\sin C$，$\therefore ac=3\sin A\sin C$.

由(1) $ac\cos B=1$，$\cos B=\frac{\sqrt{6}}{3}$得$ac=\frac{3}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，　$\therefore\sin A\sin C=\frac{\sqrt{6}}{6}$

$\triangle ABC$中，$\cos B=-\cos(A+C)=-(\cos A\cos C-\sin A\sin C)$.

$\therefore\cos A\cos C=\sin A\sin C-\cos B=\frac{\sqrt{6}}{6}-\frac{\sqrt{6}}{3}=-\frac{\sqrt{6}}{6}$.

19．解：(1) $\because MA\perp$平面$ABCD$，$AC\subset$平面$ABCD$，$\therefore AC\perp MA$.

在梯形$ABCD$中，由$AD=DC=1$，$CD\perp AD$得$AC=\sqrt{2}$由$AB=\sqrt{2}$.

$\triangle ABC$中，$AC^2+AB^2=BC^2$，　$\therefore AC\perp AB$　又$MA\cap AB=A$，

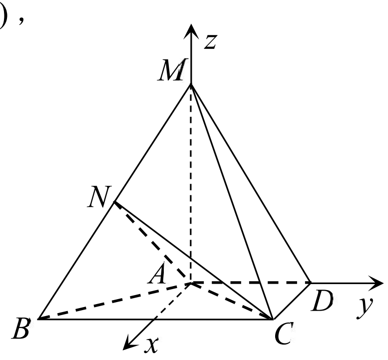
$\therefore AC\perp$平面MAB，　$\because AC\subset$平面NAC，

∴平面$MAB\perp$平面NAC.

(2) 以A为坐标原点建立如图所示的空间直角坐标系，设$MA=t$

则$M(0,0,t)$，$B(1,-1,0)$，$C(1,1,0)$，$A(0,0,0)$，$N(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{t}{2})$

$\therefore\ \overrightarrow{MB}=(1,-1,-t)\ \because\ \overrightarrow{AC}=(1,1,0)\ \overrightarrow{AN}=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{t}{2})$，



设平面 ANC 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$ 则：

$\therefore\begin{cases}\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{AN}\cdot\boldsymbol{m}=0,\end{cases}\quad \therefore\begin{cases}(1,1,0)\cdot(x,y,z)=0,\\ (\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{t}{2})\cdot(x,y,z)=0,\end{cases}$

$\therefore\ \begin{cases}x+y=0,\\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y+\frac{t}{2}z=0\end{cases}$.

令 $x=1$，则 $y=-1$，则 $z=-\frac{2}{t}$， 则 $\boldsymbol{m}=(1,-1,-\frac{2}{t})$，由 MB 与平面 ANC 所成角的

正弦值为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 得 $\left|\cos<\overrightarrow{MB},\boldsymbol{m}>\right|=\left|\frac{1+1+2}{\sqrt{1^2+1^2+t^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+\frac{4}{t^2}}}\right|=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$\therefore t=1$（舍）.

$t=2$，$\boldsymbol{m}=(1,-1,-1)$，设平面 MAD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,0,0)$，

则 $\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>=\frac{1}{\sqrt{3}\cdot 1}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

20.（1）$\because$ 函数 $h(x)=me^x-x+1$ 在 $(0,4)$ 上只有唯一零点，

$\therefore me^x-x+1=0$ 在 $(0,4)$ 上只有一个根，$\therefore m=\frac{x-1}{e^x}$ 在 $(0,4)$ 上只有一个解.

设 $k(x)=\frac{x-1}{e^x}\ \therefore k'(x)=\frac{2-x}{e^x}$，当 $0<x<2$ 时，$k'(x)>0$，

当 $2<x<4$ 时 $k'(x)<0$，$\therefore k(x)_{\max}=k(2)=\frac{1}{e^2}$，又 $k(0)=-1$，$k(4)=\frac{3}{e^4}$，

$\therefore m$ 的取值范围为 $\left(-1,\frac{3}{e^4}\right]\cup\left\{\frac{1}{e^2}\right\}$.

（2）要证 $m^2h(x_0)>-m^2+3m-1$，

即证 $h(x_0)>-\frac{1}{m^2}+\frac{3}{m}-1$，　即证 $h(x)_{\min}>-\frac{1}{m^2}+\frac{3}{m}-1$，$\because h(x)=me^x-x+1$，

$\therefore h'(x)=me^x-1$，当 $m\leqslant 0$ 时，$h'(x)<0$ 恒成立，$h(x)$ 无极值.　当 $m>0$ 时，

$h'(x)=me^x-1=0$,得 $x=-\ln m$.当 $x<-\ln m$ 时, $h'(x)<0$,当 $x>-\ln m$ 时, $h'(x)<0$

$\therefore h(x)_{\min}=h(-\ln m)=2+\ln m\ \therefore$ 即证 $2+\ln m>-\frac{1}{m^2}+\frac{3}{m}-1$

即证 $\ln m>-\frac{1}{m^2}+\frac{3}{m}-3$，

$\because r(x)=x-\ln x-1$，$\therefore r'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$，

$\because$ 当 $0<x<1$ 时，$r'(x)<0$，当 $x>1$ 时，$r'(x)>0$.

$\therefore r(x)_{\min}=r(1)=1-1-0=0\ \therefore x-1-\ln x\geqslant 0\ \ \therefore r(x)\geqslant 0$.

$\therefore r(\frac{1}{m})=\frac{1}{m}-1-\ln\frac{1}{m}\geqslant 0$，　$\therefore \ln m\geqslant 1-\frac{1}{m}$（$m=1$ 时取等号）. ……①

$\therefore (1-\frac{1}{m})-(-\frac{1}{m^2}+\frac{3}{m}-3)=\frac{1}{m^2}-\frac{4}{m}+4=(\frac{1}{m}-2)^2\geqslant 0$ （$m=\frac{1}{2}$ 时取等号），

$1-\frac{1}{m}\geqslant -\frac{1}{m^2}+\frac{3}{m}-3$，　　…………②∵ $\ln m\geqslant 1-\frac{1}{m}$ 与 $(\frac{1}{m}-2)^2\geqslant 0$ 的取等条件

不同，∴ 由①②得 $\ln m>-\frac{1}{m^2}+\frac{3}{m}-3$．∴ $\ln m+\frac{1}{m}-1+\frac{1}{m^2}-\frac{4}{m}+4>0$．

21．解：(1) 由题意得：$\begin{cases}4a=8,\\ \pi ab=2\sqrt{3}\pi,\end{cases}$ ∴ $a=2$，$b=\sqrt{3}$，

∴椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

（2）由椭圆方程可得：$F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$，直线 $PF_1: x=ty-1$，直线 $PF_2: x=my+1$，

$P(x_1,y_1)$，$M(x_2,y_2)$，$N(x_3,y_3)$ 易得 $K_{0P}=\frac{y_1}{x_1}$，

由 $\begin{cases}x=ty-1,\\ 3x^2+4y^2=12,\end{cases}$ 得 $(3t^2+4)y^2-6ty-9=0$，

∴ $y_1+y_2=\frac{6t}{3t^2+4}$，则 $x_1+x_2=t(y_1+y_2)-2=-\frac{8}{3t^2+4}$

由 $\begin{cases}x=my+1,\\ 3x^2+4y^2=12,\end{cases}$ 得 $(3m^2+4)y^2+6my-9=0$，

∴ $y_1+y_3=-\frac{6m}{3m^2+4}$，　则 $x_1+x_3=m(y_1+y_3)+2=\frac{8}{3m^2+4}$，

∴ $y_3-y_2=(y_1+y_3)-(y_1+y_2)=-\frac{6m}{3m^2+4}-\frac{6t}{3t^2+4}$，

∴ $x_3-x_2=(x_1+x_3)-(x_1+x_2)=\frac{8}{3m^2+4}+\frac{8}{3t^2+4}$，

∴ $K_{MN}=\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}=-\frac{3m(3t^2+4)+3t(3m^2+4)}{4(3t^2+4)+4(3m^2+4)}=-\frac{3}{4}\cdot\frac{(3mt+4)(m+t)}{3\left[(m+t)^2-2mt\right]+8}$，

又 $t=\frac{x_1+1}{y_1}$，$m=\frac{x_1-1}{y_1}$，∴ $mt=\frac{x_1^{\ 2}-1}{y_1^{\ 2}}, m+t=\frac{2x_1}{y_1}$，

$$\therefore K_{MN}=-\frac{3}{4}\cdot\frac{(\frac{3x_1^{\ 2}-3}{y_1^{\ 2}}+4)\cdot\frac{2x_1}{y_1}}{3(\frac{4x_1^{\ 2}}{y_1^{\ 2}}-\frac{2x_1^{\ 2}-2}{y_1^{\ 2}})+8}=-\frac{3}{4}\cdot\frac{3x_1^{\ 2}+4y_1^{\ 2}-3}{6x_1^{\ 2}+8y_1^{\ 2}+6}\cdot\frac{2x_1}{y_1},$$

又 $3x_1^{\ 2}+4y_1^{\ 2}=12$，∴ $K_{MN}=-\frac{3}{4}\times\frac{9}{30}\times\frac{2x_1}{y_1}=-\frac{9x_1}{20y_1}$.

∴ $K_{MN}\cdot K_{OA}=-\frac{9x_1}{20y_1}\cdot\frac{y_1}{x_1}=-\frac{9}{20}$.

22．解：(1) $(3,\frac{\pi}{2})$ 化为直角坐标为 $(0,3)$，$(3\sqrt{2},\frac{3\pi}{4})$ 化为直角坐标为 $(-3,3)$，

∴圆的半径为 3.

∴曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+(y-3)^2=9$．∴曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=6\sin\theta$.

(2) $\left|OM\right| = \rho_M = 6\sin\alpha \quad \left|ON\right| = \rho_N = 6\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})$

$$S_{\triangle MON} = \frac{1}{2}\times 6\sin\alpha\times 6\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})\times\sin\frac{\pi}{3} = 9\sqrt{3}\sin\alpha(\frac{1}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha)$$

$$= \frac{9\sqrt{3}}{2}(\sin^2\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha) = \frac{9\sqrt{3}}{2}(\frac{1-\cos 2\alpha}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha)$$

$$= \frac{9\sqrt{3}}{2}\left[\sin(2\alpha+\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}\right] \leqslant \frac{27\sqrt{3}}{4},$$

$\therefore$ 当 $2\alpha+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$ 时，即 $\alpha=\frac{\pi}{3}$ 时取等.

23．解：(1) 由题意得

$$\begin{cases} x\geqslant 2, \\ (x-2)-(2x-1)+1\geqslant 0 \end{cases}，\text{或者}\begin{cases} \frac{1}{2}<x<2, \\ (2-x)-(2x-1)+1\geqslant 0 \end{cases},$$

$$\text{或者}\begin{cases} x\leqslant \frac{1}{2}, \\ (2-x)-(1-2x)+1\geqslant 0 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} x\geqslant 2, \\ x\leqslant 0 \end{cases}，\text{或者}\begin{cases} \frac{1}{2}<x<2, \\ x\leqslant\frac{4}{3} \end{cases}，\text{或者}\begin{cases} x\leqslant\frac{1}{2}, \\ x\geqslant -2 \end{cases}，\therefore \frac{1}{2}<x\leqslant\frac{4}{3}\text{或者}-2\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}.$$

$\therefore$ 不等式的解集为 $\left[-2,\frac{4}{3}\right) \qquad \therefore t=-2$.

(2) 由（1）知 m， $n\in(2,+\infty)$，设 $x=m-2$， $y=n-2$.

$\because m+n=5$， $\qquad \therefore x+y=1$.

$$\therefore z=\frac{n^2}{m-2}+\frac{m^2}{n-2}=\frac{(y+2)^2}{x}+\frac{(x+2)^2}{y}=\frac{(3-x)^2}{x}+\frac{(3-y)^2}{y}=x+\frac{9}{x}-6+y+\frac{9}{y}-6,$$

$$z=\frac{9}{x}+\frac{9}{y}-11=(\frac{9}{x}+\frac{9}{y})(x+y)-11=\frac{9y}{x}+\frac{9x}{y}+7\geqslant 2\sqrt{9\times 9}+7=25.$$

$\therefore$ 当 $x=y$ 时，即 $m=n$ 时等号成立，所以 z 的最小值为 25.