2023——2024学年度高2024届半期考试

数学参考答案（理科）

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
选项	B	D	C	D	C	A	A	B	A	C	A	B

二、填空题

13. $135°$　　14. 28　　15. 2191　　16. $\frac{5}{7}$

三．解答题：

17（Ⅰ）$\dfrac{b}{1-\cos B}=4$，根据正弦定理得 $\dfrac{2\sin B}{1-\cos B}=4$，即 $\sin B=2(1-\cos B)$，代入 $\sin^2 B+\cos^2 B=1$，

即 $4(1-\cos B)^2=1-\cos^2 B=(1-\cos B)(1+\cos B)$，由于 $1-\cos B\neq 0$，即 $4(1-\cos B)=1+\cos B$，

解得 $\cos B=\dfrac{3}{5}$. …………5 分

（Ⅱ）根据正弦定理得 $\sin A+\sin C=\dfrac{a}{2}+\dfrac{c}{2}=1$，即 $a+c=2$，由（Ⅰ）知 $b=\dfrac{8}{5}$. 由余弦定理得

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=(a+c)^2-\dfrac{16}{5}ac=4-\dfrac{16}{5}ac$，解得 $ac=\dfrac{9}{20}$. …………10 分

又因为 $\cos B=\dfrac{3}{5}$，所以 $\sin B=\dfrac{4}{5}$. $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{9}{50}$. …………12 分

18．　解：（1）由条件知 $FD\perp DC, FD\perp AD, AD\cap DC=D$,

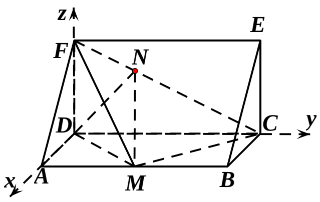
$\therefore FD\perp 平面ABCD, \therefore FD\perp CM$.　　………………2 分

$\because AD=AM=MB=BC=a, \angle DAM=\angle CBM=90^\circ$，

$\therefore DM=MC=\sqrt{2}a$，$CD=2a, \therefore DM^2+CM^2=CD^2, \therefore CM\perp DM$.　　……4 分

$\therefore CM\perp DM, FD\cap DM=D, \therefore CM\perp 平面FDM$.　　………………5 分

（2）以 D 为原点，$\overrightarrow{DA}$、$\overrightarrow{DC}$、$\overrightarrow{DF}$ 为 x、y、z 轴的非负方向建立空间直角坐标系. $M(a,a,0), F(0,0,a)$，$C(0,2a,0)$，$\overrightarrow{FC}=(0,2a,-a)$，$\overrightarrow{DM}=(a,a,0)$，



$\overrightarrow{FN}=\lambda\overrightarrow{FC}=(0,2\lambda a,-\lambda a)$，$\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{FN}=(0,2\lambda a,(1-\lambda)a)$　……6 分

设平面 DMN 的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(x,y,z)$，

由 $\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{DM}=ax+ay=0\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{DN}=2\lambda ay+(1-\lambda)az=0\end{cases}$ 得，取 $z=2\lambda$，则 $y=\lambda-1, x=1-\lambda$.

$\therefore \overrightarrow{n_1}=(1-\lambda,\lambda-1,2\lambda)$.　　………………8 分

由（1）知，平面 FDM 的法向量为 $\overrightarrow{MC}=(-a,a,0)$　　……………9 分

由题意 $\left|\cos<\overrightarrow{CM},\overrightarrow{n_1}>\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{n_1}\right|}{\left|\overrightarrow{CM}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_1}\right|}=\dfrac{|2(\lambda-1)\ a|}{\sqrt{2}a\cdot\sqrt{2(\lambda-1)^2+(2\lambda)^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，　…………10 分

解得 $\lambda=\dfrac{1}{2}$.　　……………12 分

19．**解析：**（Ⅰ）两人得分之和不大于 35 分，即两人得分均为 17 分，或两人中 1 人 17 分，1 人 18 分，

$P=\frac{C_6^2+C_6^1C_{12}^1}{C_{100}^2}=\frac{29}{1650}$ ………………3 分

（Ⅱ）$\overline{X}$＝160×0.06+170×0.12+180×0.34+190×0.30+200×0.1+210×0.08＝185（cm）…5 分

又 σ^2=153，σ＝12.37，所以初三结束进行测试时，μ＝195，σ＝12.37，∴μ－σ＝182.63.

（i）∴P（ξ＞182.63）＝$1-\frac{1-0.6826}{2}$＝0.8413，∴0.8413×2000＝1682.6≈1683.（人）…7 分

（ii）由正态分布模型，全年级所有学生中任取 1 人，跳远距离在 195cm 以上的概率为 0.5，

即 ξ～B（3，0.5），∴P（ξ＝0）＝$C_3^0(1-0.5)^3=0.125$，P（ξ＝1）＝$C_3^1 0.5\bullet(1-0.5)^2=0.375$，$P$（ξ＝2）＝$C_3^2 0.5^2\bullet(1-0.5)=0.375$，$P$（ξ＝3）＝$C_3^3 0.5^3=0.125$，………………10 分

∴ξ 的分布列为：

ξ	0	1	2	3
P	0.125	0.375	0.375	0.125

E（ξ）＝3×0.5＝1.5　12 分

20.（1）设$p(t^2,2t),(t\neq 0)$,则M坐标为(－1，2t)，∴ MF中点坐标为(0，t)，$k_{MF}=-t$

又∵$|PM|=|PF|$,∴ ΔPMF为等腰三角形，∴ $\angle MPF$的角平分线即为MF中垂线

∴ l的方程为$y=\frac{1}{t}x+t$ …………2分

联立$\begin{cases} y=\frac{1}{t}x+t \\ y^2=4x \end{cases}$,得$y^2-4ty+4t^2=0$…………3分

$\Delta=16t^2-16t^2=0$…………4分　　∴ l与抛物线只有一个交点　…………5分

（2）设点 $N(-1,m)$，由题意可知，NP，NQ 为抛物线 $y^2=4x$ 的两条切线.

先证过抛物线上一点 $K(x_0,y_0)$且与抛物线相切的方程为 $yy_0=2(x+x_0)$，

证明：因为 $K(x_0,y_0)$在抛物线上，所以 $y_0^2=4x_0$，不妨设 $y_0>0$，$y=2\sqrt{x}$，因此 $y'=\frac{1}{\sqrt{x}}$，所以切线方程为

$y-y_0=\frac{1}{\sqrt{x_0}}(x-x_0)$，所以 $y-y_0=\frac{2}{y_0}(x-x_0)$，化简得：$yy_0=2(x+x_0)$.　……7 分

因此，设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则根据上述结论可知：NP: $yy_1=2(x+x_1)$，NQ: $yy_2=2(x+x_2)$，

因为 NP，NQ 都过点 $N(-1,m)$，带入上式得：$\begin{cases} my_1=2(x_1-1) \\ my_2=2(x_2-1) \end{cases}$，所以可知点 P，Q 都在直线 $my=2(x-1)$ 上，因此直线 PQ 的方程为 $my=2(x-1)$.……………………………………………8 分

联立$\begin{cases} my=2(x-1) \\ y^2=4x \end{cases}$,得$y^2-2my-4=0$，$\Delta=4m^2+16>0$………………………………………9 分

$\therefore |PQ|=\sqrt{1+\frac{m^2}{4}}|y_1-y_2|=\sqrt{\frac{4+m^2}{4}}\sqrt{4m^2+16}=4+m^2$，点$N$到直线$PQ$距离$d=\frac{|m^2+4|}{\sqrt{4+m^2}}=\sqrt{4+m^2}$ …11 分

$\therefore S_{\triangle NPQ}=\frac{1}{2}\left(4+m^2\right)^{\frac{3}{2}}$,∴ 当$m=0$时，$\Delta NPQ$面积有最小值4.………………………………12 分

21. 解：（1）$F(x)=x^2-2x-a\ln x+ax$，$F'(x)=\dfrac{2x^2+(a-2)x-a}{x}=\dfrac{(2x+a)(x-1)}{x}$，……1 分

$\because F(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

①$-\dfrac{a}{2}\leqslant 0$ 即 $a\geqslant 0$ 时，$F(x)$ 在 $(0,1)$ 上递减，$F(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上递增，

$F(x)_{极小}=a-1$，$F(x)$ 无极大值．……2 分

②$0<-\dfrac{a}{2}<1$ 即 $-2<a<0$ 时，$F(x)$ 在 $\left(0,-\dfrac{a}{2}\right)$ 和 $(1,+\infty)$ 上递增，在 $\left(-\dfrac{a}{2},1\right)$ 上递减，

’$F(x)_{极大}=F\left(-\dfrac{a}{2}\right)=a-\dfrac{a^2}{4}-a\ln\left(-\dfrac{a}{2}\right)$，$F(x)_{极小}=F(1)=a-1$．……3 分

③$-\dfrac{a}{2}=1$ 即 $a=-2$ 时，$F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增，$F(x)$ 没有极值．……4 分

④$-\dfrac{a}{2}>1$ 即 $a<-2$ 时，$F(x)$ 在 $(0,1)$ 和 $\left(-\dfrac{a}{2},+\infty\right)$ 上递增，$F(x)$ 在 $\left(1,-\dfrac{a}{2}\right)$ 上递减，

$\therefore F(x)_{极大}=F(1)=a-1$，$F(x)_{极小}=F\left(-\dfrac{a}{2}\right)=a-\dfrac{a^2}{4}-a\ln\left(-\dfrac{a}{2}\right)$．……5 分

综上可知：$a\geqslant 0$ 时，$F(x)_{极小}=a-1$，$F(x)$ 无极大值；

$-2<a<0$ 时，$F(x)_{极大}=F\left(-\dfrac{a}{2}\right)=a-\dfrac{a^2}{4}-a\ln\left(-\dfrac{a}{2}\right)$，$F(x)_{极小}=F(1)=a-1$；

$a=-2$ 时，$F(x)$ 没有极值；

$a<-2$ 时，$F(x)_{极大}=F(1)=a-1$，$F(x)_{极小}=F\left(-\dfrac{a}{2}\right)=a-\dfrac{a^2}{4}-a\ln\left(-\dfrac{a}{2}\right)$．··6 分

（2）设 $h(x)=ax-\dfrac{\sin x}{2+\cos x}\ (x\geqslant 0)$，$h'(x)=a-\dfrac{1+2\cos x}{(2+\cos x)^2}$，

设 $t=\cos x$，则 $t\in[-1,1]$，$\varphi(t)=\dfrac{1+2t}{(2+t)^2}$，$\varphi'(t)=\dfrac{-2(t+2)(t-1)}{(2+t)^4}=\dfrac{-2(t-1)}{(2+t)^3}\geqslant 0$，

$\therefore \varphi(t)$ 在 $[-1,1]$ 上递增，$\therefore \varphi(t)$ 的值域为 $\left[-1,\dfrac{1}{3}\right]$，……8 分

①当 $a\geqslant\dfrac{1}{3}$ 时，$h'(x)\geqslant 0$，$h(x)$ 为 $[0,+\infty]$ 上的增函数，$\therefore h(x)\geqslant h(0)=0$，适合条件．……9 分

②当 $a\leqslant 0$ 时，$\because h\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=a\cdot\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{2}<0$，$\therefore$不适合条件．……10 分

③当 $0<a<\dfrac{1}{3}$ 时，对于 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$，$h(x)<ax-\dfrac{\sin x}{3}$，

令 $T(x)=ax-\dfrac{\sin x}{3}$，$T'(x)=a-\dfrac{\cos x}{3}$，存在 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，使得 $x\in(0,x_0)$ 时，$T'(x)<0$，

$\therefore T(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，$\therefore T(x_0)<T(0)=0$，即在 $x\in(0,x_0)$ 时，$h(x)<0$，$\therefore$不适合条件．

综上，a 的取值范围为 $\left[\dfrac{1}{3},+\infty\right)$．……12 分

22．解：（1）消去参数t，得曲线C_1的直角坐标方程为$y-2=\frac{1}{2}(x-1)$，即$x-2y+3=0$.

把$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$代入$\rho^2=6\rho\sin\theta$，曲线$C_2$的直角坐标方程为$x^2+y^2-6y=0$. …5 分

（2）圆心到直线 AB 的距离为$d=\frac{|0-2\times3+3|}{\sqrt{1+(-2)^2}}=\frac{3}{\sqrt5}$

圆上动点 P 到弦 AB 的距离的最大值为$d+r=\frac{3}{\sqrt5}+3$

解法 1：弦长$|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{3^2-\left(\frac{3}{\sqrt5}\right)^2}=\frac{12}{\sqrt5}$

∴$\triangle PAB$的面积 S 的最大值为$\frac{1}{2}|AB|d=\frac{1}{2}\times\frac{12}{\sqrt5}\times\left(\frac{3}{\sqrt5}+3\right)=\frac{18}{5}(1+\sqrt5)$.　　.........10 分

解法 2：设圆C_2上动点$P(3\cos\theta,3+3\sin\theta)$，P 到直线$C_1$的距离

$$d=\frac{|3\cos\theta-2(3+3\sin\theta)+3|}{\sqrt5}=\frac{|-6\sin\theta+3\cos\theta-3|}{\sqrt5}=\frac{|-3\sqrt5\sin(\theta-\phi)-3|}{\sqrt5}\le3+\frac{3}{\sqrt5}$$

化C_1的参数方程为$\begin{cases}x=1+\frac{2}{\sqrt5}t\\ y=2+\frac{1}{\sqrt5}t\end{cases}$代入$x^2+y^2-6y=0$得，$t^2+\frac{2}{\sqrt5}t-7=0$

则$t_1+t_2=-\frac{2}{\sqrt5},t_1t_2=-7$　则$|AB|=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=\sqrt{\left(\frac{-2}{\sqrt5}\right)^2-4\times(-7)}=\frac{12}{\sqrt5}$

∴$\triangle PAB$的面积 S 的最大值为$\frac{1}{2}|AB|d=\frac{1}{2}\times\frac{12}{\sqrt5}\times\left(\frac{3}{\sqrt5}+3\right)=\frac{18}{5}(1+\sqrt5)$.

23. 解：（1）$f(x)+f(x+4)=|x-1|+|x+3|=\begin{cases}-2x-2, & x<-3\\ 4, & -3\le x\le1\\ 2x+2, & x>1\end{cases}$　--------3 分

当$x<-3$时，$-2x-2\ge8$，解得$x\le-5$；　当$x>1$时，$2x+2\ge8$，解得$x\ge3$

综上，原不等式的解集为$(-\infty,-5]\cup[3,+\infty)$　　--------------------5 分

（2）因为$|a|<1,|b|<1$，所以$f(ab)=|ab-1|=1-ab,\ |a|f(\frac{b}{a})=|a||\frac{b}{a}-1|=|b-a|$

令$m=f(ab)-|a|f(\frac{b}{a})=1-ab-|b-a|$，　　-------------7 分

若$b<a$，则$m=1-ab-|b-a|=(1-a)(1+b)$，

因为$|a|<1,|b|<1$，所以$m>0$，所以$f(ab)>|a|f(\frac{b}{a})$；　-------------9 分

若$b\ge a$，则$m=1-ab-|b-a|=(1+a)(1-b)$，

因为$|a|<1,|b|<1$，所以$m>0$，所以$f(ab)>|a|f(\frac{b}{a})$综上所述，$f(ab)>|a|f(\frac{b}{a})$　-------------10 分