2023——2024 学年度高 2024 届半期考试

数学参考答案（文科）

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
选项	B	B	B	D	C	A	A	D	B	C	A	A

二、填空题

13. 135°　　14. $\frac{9}{5}$　　15. 2191　　16. ②③

三．解答题：

17(Ⅰ) $\dfrac{b}{1-\cos B}=4$，根据正弦定理得 $\dfrac{2\sin B}{1-\cos B}=4$, 即 $\sin B=2(1-\cos B)$，代入 $\sin^2 B+\cos^2 B=1$，

即 $4(1-\cos B)^2=1-\cos^2 B=(1-\cos B)(1+\cos B)$, 由于 $1-\cos B\neq 0$，即 $4(1-\cos B)=1+\cos B$，

解得 $\cos B=\dfrac{3}{5}$. …………5 分

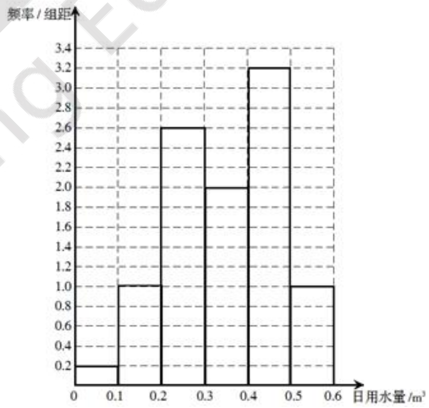
(Ⅱ)根据正弦定理得 $\sin A+\sin C=\dfrac{a}{2}+\dfrac{c}{2}=1$，即 $a+c=2$，由(Ⅰ)知 $b=\dfrac{8}{5}$. 由余弦定理得

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=(a+c)^2-\dfrac{16}{5}ac=4-\dfrac{16}{5}ac$，解得 $ac=\dfrac{9}{20}$. …………10 分

又因为 $\cos B=\dfrac{3}{5}$，所以

$\sin B=\dfrac{4}{5}$. $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{9}{50}$. …………12 分

18. （1）频率分布直方图如下图所示：　…4 分



（2）根据以上数据，该家庭使用节水龙头后50天日用水量小于 $0.35m^3$ 的频率为 $0.2\times 0.1+1\times 0.1+2.6\times 0.1+2\times 0.05=0.48$；

因此该家庭使用节水龙头后日用水量小于 $0.35m^3$ 的概率的估计值为0.48；…7 分

（3）该家庭未使用节水龙头50天日用水量的平均数为

$$\overline{x_1}=\frac{1}{50}(0.05\times 1+0.15\times 3+0.25\times 2+0.35\times 4+0.45\times 9+0.55\times 26+0.65\times 5)=0.48 \cdots 9\text{ 分}$$

该家庭使用了节水龙头后 50 天日用水量的平均数为

$$\overline{x_2}=\frac{1}{50}(0.05\times 1+0.15\times 5+0.25\times 13+0.35\times 10+0.45\times 16+0.55\times 5)=0.35. \cdots 11\text{ 分}$$

估计使用节水龙头后，一年可节省水 $(0.48-0.35)\times 365=47.45(\mathrm{m}^3)$.　…12 分

19．解：(1)证明：连接 PM，在 $Rt\Delta PAB$ 中，$PB=2\sqrt{3}$，$PC=4$，

所以 $PA=2$. 因为点 M 是 AB 的中点，所以 $BM=PM=2$.　……1 分

在 ΔBMC 中，$\angle MBC=\dfrac{\pi}{3}$，$BM=2$，$BC=4$，由余弦定理，有 $CM=2\sqrt{3}$，

所以 $BM^2+CM^2=BC^2$，所以 $AB\perp CM$.　……3 分

在ΔPMC中，$PM=2$，$CM=2\sqrt{3}$，$PC=4$满足$PC^2=CM^2+PM^2$，

所以$PM\perp CM$. ……5 分

又$AB\cap PM=M$，AB、$PM\subset$平面PAB，所以$CM\perp$平面PAB. ……6 分

(2) 四面体$PMND$的体积即三棱锥$P-MND$的体积. ……7 分

因为$CM\perp$平面PAB，且$CM\subset$平面$ABCD$，所以平面$PAB\perp$平面$ABCD$，

作$PH\perp AB$交AB于H，且平面$PAB\cap$平面$ABCD=AB$，又$PH\subset$平面PAB，

所以$PH\perp$平面$ABCD$. ……9 分

在ΔPAB中，$PH=\dfrac{PA\cdot PB}{AB}=\sqrt{3}$，即三棱锥$P-MND$的高为$\sqrt{3}$. ……10 分

因为$MC\perp CD$，所以在ΔMND中，$S_{\Delta MND}=\dfrac{1}{2}MC\cdot ND=\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 2=2\sqrt{3}$. ……11 分

所以$V_{三棱锥P-MND}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta MND}\cdot PH=\dfrac{1}{3}\cdot 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=2$，

即四面体$PMND$的体积为 2. ……12 分

20.（1）设$p(t^2,2t),(t\neq 0)$，则M坐标为$(-1,2t)$，$\therefore$ MF中点坐标为$(0,t)$，$k_{MF}=-t$

又$\because |PM|=|PF|$，$\therefore$ ΔPMF为等腰三角形，$\therefore$ $\angle MPF$的角平分线即为MF中垂线

$\therefore$ l的方程为$y=\dfrac{1}{t}x+t$ ………… 2分

联立$\begin{cases} y=\dfrac{1}{t}x+t \\ y^2=4x \end{cases}$，得$y^2-4ty+4t^2=0$………… 3分

$\Delta=16t^2-16t^2=0$………… 4分　　$\therefore$ l与抛物线只有一个交点　　………… 5分

（2）设点$N(-1,m)$，由题意可知，NP，NQ为抛物线$y^2=4x$的两条切线.

先证过抛物线上一点$K(x_0,y_0)$且与抛物线相切的方程为$yy_0=2(x+x_0)$，

证明：因为$K(x_0,y_0)$在抛物线上，所以$y_0^2=4x_0$，不妨设$y_0>0$，$y=2\sqrt{x}$，因此$y'=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$，所以切线方程为

$y-y_0=\dfrac{1}{\sqrt{x_0}}(x-x_0)$，所以$y-y_0=\dfrac{2}{y_0}(x-x_0)$，化简得：$yy_0=2(x+x_0)$. ……7 分

因此，设$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则根据上述结论可知：NP: $yy_1=2(x+x_1)$，NQ: $yy_2=2(x+x_2)$，

因为NP，NQ都过点$N(-1,m)$，带入上式得：$\begin{cases} my_1=2(x_1-1) \\ my_2=2(x_2-1) \end{cases}$，所以可知点$P$，$Q$都在直线$my=2(x-1)$

上，因此直线PQ的方程为$my=2(x-1)$.……………………8 分

联立$\begin{cases} my=2(x-1) \\ y^2=4x \end{cases}$，得$y^2-2my-4=0$，$\Delta=4m^2+16>0$ ……………………9 分

$\therefore |PQ|=\sqrt{1+\dfrac{m^2}{4}}|y_1-y_2|=\sqrt{\dfrac{4+m^2}{4}}\sqrt{4m^2+16}=4+m^2$，

点N到直线PQ距离$d=\dfrac{|m^2+4|}{\sqrt{4+m^2}}=\sqrt{4+m^2}$ …11 分

$\therefore S_{\Delta NPQ}=\dfrac{1}{2}\left(4+m^2\right)^{\frac{3}{2}}$，$\therefore$ 当$m=0$时，ΔNPQ面积有最小值4.……………………12 分

21. 解：（1）$F(x)=x^2-2x-a\ln x+ax$，$F'(x)=\dfrac{2x^2+(a-2)x-a}{x}=\dfrac{(2x+a)(x-1)}{x}$，……1 分

$\because F(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$．

$\because a>0$, 则 $-\dfrac{a}{2}<0$ $\therefore F'(x)=0$, 有 $x=-\dfrac{a}{2}$(舍去)，$x=1$, ……2 分

$F(x)$ 在 $(0,1)$ 上递减，$F(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上递增，

$F(x)_{极小}=a-1$，$F(x)$ 无极大值．……4 分

（2）设 $h(x)=ax-\dfrac{\sin x}{2+\cos x}$ $x\in[0,2\pi]$，$h'(x)=a-\dfrac{1+2\cos x}{(2+\cos x)^2}$，……5 分

设 $t=\cos x$，则 $t\in[-1,1]$，$\varphi(t)=\dfrac{1+2t}{(2+t)^2}$，$\varphi'(t)=\dfrac{-2(t+2)(t-1)}{(2+t)^4}=\dfrac{-2(t-1)}{(2+t)^3}\geqslant 0$，……7 分

$\therefore \varphi(t)$ 在 $[-1,1]$ 上递增，$\therefore \varphi(t)$ 的值域为 $\left[-1,\dfrac{1}{3}\right]$，……8 分

①当 $a\geqslant\dfrac{1}{3}$ 时，$h'(x)\geqslant 0$，$h(x)$ 为 $[0,+\infty]$ 上的增函数，$\therefore h(x)\geqslant h(0)=0$，适合条件．……9 分

②当 $a\leqslant 0$ 时，$\because h\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=a\cdot\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{2}<0$，$\therefore$不适合条件．……10 分

③当 $0<a<\dfrac{1}{3}$ 时，对于 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$，$h(x)<ax-\dfrac{\sin x}{3}$，

令 $T(x)=ax-\dfrac{\sin x}{3}$，$T'(x)=a-\dfrac{\cos x}{3}$，存在 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，使得 $x\in(0,x_0)$ 时，$T'(x)<0$，

$\therefore T(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，$\therefore T(x_0)<T(0)=0$，即在 $x\in(0,x_0)$ 时，$h(x)<0$，$\therefore$不适合条件．

综上，a 的取值范围为 $\left[\dfrac{1}{3},+\infty\right)$．……12 分

22．解：（1）消去参数 t，得曲线 C_1 的直角坐标方程为 $y-2=\dfrac{1}{2}(x-1)$, 即 $x-2y+3=0$.

把 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$ 代入 $\rho^2=6\rho\sin\theta$，曲线 C_2 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-6y=0$. …5 分

（2）圆心到直线 AB 的距离为 $d=\dfrac{|0-2\times3+3|}{\sqrt{1+(-2)^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{5}}$

圆上动点 P 到弦 AB 的距离的最大值为 $d+r=\dfrac{3}{\sqrt{5}}+3$

解法 1：弦长 $|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{3^2-\left(\dfrac{3}{\sqrt{5}}\right)^2}=\dfrac{12}{\sqrt{5}}$

$\therefore \triangle PAB$ 的面积 S 的最大值为 $\dfrac{1}{2}|AB|d=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{12}{\sqrt{5}}\times\left(\dfrac{3}{\sqrt{5}}+3\right)=\dfrac{18}{5}(1+\sqrt{5})$.　　.........10 分

解法 2：设圆 C_2 上动点 $P(3\cos\theta,3+3\sin\theta)$,P 到直线 C_1 的距离

$$d=\frac{|3\cos\theta-2(3+3\sin\theta)+3|}{\sqrt{5}}=\frac{|-6\sin\theta+3\cos\theta-3|}{\sqrt{5}}=\frac{|-3\sqrt{5}\sin(\theta-\phi)-3|}{\sqrt{5}}\leq 3+\frac{3}{\sqrt{5}}$$

化 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=1+\frac{2}{\sqrt{5}}t \\ y=2+\frac{1}{\sqrt{5}}t \end{cases}$ 代入 $x^2+y^2-6y=0$ 得， $t^2+\frac{2}{\sqrt{5}}t-7=0$

则 $t_1+t_2=-\frac{2}{\sqrt{5}}, t_1t_2=-7$ 则 $|AB|=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=\sqrt{\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}\right)^2-4\times(-7)}=\frac{12}{\sqrt{5}}$

$\therefore \triangle PAB$ 的面积 S 的最大值为 $\frac{1}{2}|AB|d=\frac{1}{2}\times\frac{12}{\sqrt{5}}\times\left(\frac{3}{\sqrt{5}}+3\right)=\frac{18}{5}\left(1+\sqrt{5}\right)$.

23. 解：（1） $f(x)+f(x+4)=|x-1|+|x+3|=\begin{cases} -2x-2, & x<-3 \\ 4, & -3\le x\le 1 \\ 2x+2, & x>1 \end{cases}$ ---------3 分

当 $x<-3$ 时， $-2x-2\ge 8$ ，解得 $x\le -5$ ； 当 $x>1$ 时， $2x+2\ge 8$ ，解得 $x\ge 3$

综上，原不等式的解集为 $(-\infty,-5]\cup[3,+\infty)$ --------------------5 分

（2）因为 $|a|<1,|b|<1$ ，所以 $f(ab)=|ab-1|=1-ab,\ |a|f(\frac{b}{a})=|a||\frac{b}{a}-1|=|b-a|$

令 $m=f(ab)-|a|f(\frac{b}{a})=1-ab-|b-a|$， --------------7 分

若 $b<a$ ，则 $m=1-ab-|b-a|=(1-a)(1+b)$ ，

因为 $|a|<1,|b|<1$ ，所以 $m>0$ ，所以 $f(ab)>|a|f(\frac{b}{a})$ ； --------------9 分

若 $b\ge a$ ，则 $m=1-ab-|b-a|=(1+a)(1-b)$ ，

因为 $|a|<1,|b|<1$ ，所以 $m>0$ ，所以 $f(ab)>|a|f(\frac{b}{a})$ 综上所述， $f(ab)>|a|f(\frac{b}{a})$ ------------10 分