

2023—2024 学年度上期高 2024 届半期考试

数学试卷(文科)

考试时间：120 分钟 满分：150 分

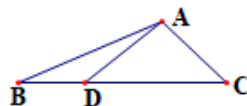
注意事项：

1. 答题前, 务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上.
2. 本试卷分选择题和非选择题两部分.
3. 答选择题时, 必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑, 如需改动, 用橡皮擦擦干净后, 再选涂其它答案标号.
4. 答非选择题时, 必须使用 0.5 毫米黑色签字笔, 将答案书写在答题卡规定位置上.
5. 所有题目必须在答题卡上作答, 在试题卷上答题无效.
6. 考试结束后, 只将答题卡交回

第 I 卷(选择题, 共 60 分)

一、选择题: (本题共 12 小题, 每小题 5 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.)

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 2x < 0\}$, $B = \{x | 2^x > 1\}$, 则 ()
 A. $B \subseteq A$ B. $A \subseteq B$ C. $A \cup B = R$ D. $A \cap B = \emptyset$
2. 若 $z(1+i) = 2i$, 则复数 z 的共轭复数 $\bar{z} =$ ()
 A. $1+i$ B. $1-i$ C. $-1+i$ D. $-1-i$
3. 已知角 θ 的顶点与原点重合, 始边与 x 轴的正半轴重合, 终边在直线 $y = 2x$ 上, 则 $\cos 2\theta =$ ()
 A. $-\frac{4}{5}$ B. $-\frac{3}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{5}$
4. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, $a_6 = 5$, $a_3 + a_8 = 15$, 则 a_9 的值为 ()
 A. 15 B. -15 C. 10 D. -10
5. 已知空间两不同直线 m 、 n , 两不同平面 α 、 β , 下列命题正确的是 ()
 A. 若 $m // \alpha$ 且 $n // \alpha$, 则 $m // n$ B. 若 $m \perp \beta$ 且 $m \perp n$, 则 $n // \beta$
 C. 若 $m \perp \alpha$ 且 $m // \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$ D. 若 m 不垂直于 α , 且 $n \subset \alpha$, 则 m 不垂直于 n
6. 将函数 $f(x) = \cos 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位得到函数 $g(x)$ 的图象, 则关于函数 $y = g(x)$ 以下说法正确的是 ()
 A. 最大值为 1, 图象关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称 B. 周期为 π , 图象关于点 $(\frac{3\pi}{8}, 0)$ 对称
 C. 在 $(-\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{8})$ 上单调递增, 为偶函数 D. 在 $(0, \frac{\pi}{4})$ 上单调递减, 为奇函数
7. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 120^\circ$, $AB = 2$, $AC = 1$, D 是 BC 边一点, $DC = 2BD$, 则 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}$ 等于 ()
 A. $-\frac{8}{3}$ B. $\frac{8}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $-\frac{2}{3}$

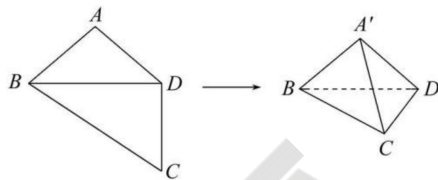


8. 设 $a = \log_3 3$, $b = 2^{-\frac{1}{2}}$, $c = \sin \frac{\pi}{8}$, 则()

- A. $b < c < a$ B. $a < c < b$ C. $c < b < a$ D. $c < a < b$

9. 如图, 平面四边形 $ABCD$ 中, $AB = AD = CD = 1, BD = \sqrt{2}, BD \perp CD$, 将其沿对角线 BD 折成四面体 $A'-BCD$, 使平面 $A'BD \perp$ 平面 BCD , 四面体 $A'-BCD$ 的顶点在同一个球面上, 则该球的体积为()

- A. $4\sqrt{3}\pi$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$
C. $\frac{4}{3}\pi$ D. $\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$



10. 已知函数 $f(x) = kx \ln x - \frac{x^2}{2} - kx (k \in R)$ 在 $(0, e^2)$ 有且只有一个极值点, 则 k 的取值范围是()

- A. $[0, e)$ B. $(-\infty, 0) \cup [\frac{e^2}{2}, +\infty) \cup \{e\}$
C. $(-\infty, 0) \cup [\frac{e^2}{2}, +\infty)$ D. $(0, e]$

11. 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 1, AD = 2$, 动点 P 在以点 C 为圆心且与 BD 相切的圆上. 若 $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AD}$, 则 $\lambda + \mu$ 的最大值为()

- A. 3 B. $2\sqrt{2}$ C. $\sqrt{5}$ D. 2

12. 已知 O 为坐标原点, F 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点, A, B 分别为 C 的左、右顶点. P 为 C 上一点, 且 $PF \perp x$ 轴. 过点 A 的直线 l 与线段 PF 交于点 M , 与 y 轴交于点 E . 若直线 BM 经过 OE 的中点, 则 C 的离心率为()

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{4}$

第 II 卷(非选择题, 共 90 分)

二、填空题: (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.)

13. 曲线 $y = x^2 - 2x - \ln x + 2$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线的倾斜角为_____.

14. 点 $(3, 0)$ 到双曲线 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 的一条渐近线的距离为_____.

15. 数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = a_2 = 1, a_{2n+1} - a_{2n-1} = 2, \frac{a_{2n+2}}{a_{2n}} = 2$, 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和记为 S_n , 则 $S_{23} =$ _____.

16. 已知 $a > 0, b > 0$, 则在下列关系

- ① $a^2 + b^2 \leq 2$ ② $b \leq e^{1-a}$ ③ $\cos \frac{a}{2} \geq \frac{1}{3-b}$ ④ $e^a - ea = e^b - eb$ 中,

能作为 “ $a + b \leq 2$ ” 的必要不充分条件的是_____ (填正确的序号).

三、解答题：(本题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.)

17. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 其外接圆半径为 1, $\frac{b}{1-\cos B} = 4, \sin A + \sin C = 1$.

- (1) 求 $\cos B$;
- (2) 求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. (本小题满分 12 分)

某家庭记录了未使用节水龙头 50 天的日用水量数据 (单位: m^3) 和使用了节水龙头 50 天的日用水量数据, 得到频数分布表如下:

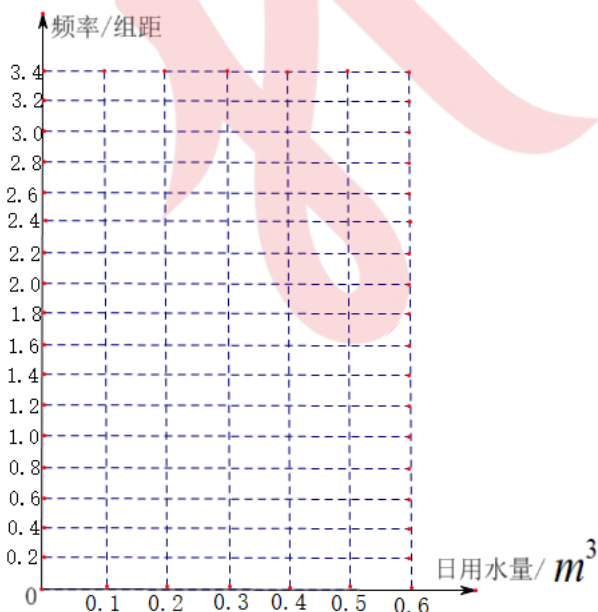
未使用节水龙头 50 天的日用水量频数分布表

| | | | | | | | |
|------|---------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 日用水量 | [0,0.1) | [0.1,0.2) | [0.2,0.3) | [0.3,0.4) | [0.4,0.5) | [0.5,0.6) | [0.6,0.7) |
| 频数 | 1 | 3 | 2 | 4 | 9 | 26 | 5 |

使用了节水龙头 50 天的日用水量频数分布表

| | | | | | | |
|------|---------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 日用水量 | [0,0.1) | [0.1,0.2) | [0.2,0.3) | [0.3,0.4) | [0.4,0.5) | [0.5,0.6) |
| 频数 | 1 | 5 | 13 | 10 | 16 | 5 |

- (1) 在下图中作出使用了节水龙头 50 天的日用水量数据的频率分布直方图;
- (2) 估计该家庭使用节水龙头后, 日用水量小于 $0.35m^3$ 的概率;
- (3) 估计该家庭使用节水龙头后, 一年能节省多少水? (一年按 365 天计算, 同一组中的数据以这组数据所在区间中点的值作代表.)



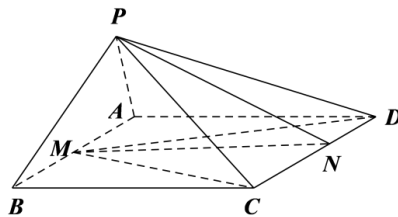
19. (本小题满分 12 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 4 的菱形, $\angle APB = \frac{\pi}{2}$, $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$, $PB = 2\sqrt{3}$,

$PC = 4$, 点 M 、 N 分别是 AB 、 CD 的中点.

(1) 求证: $CM \perp$ 平面 PAB ;

(2) 求四面体 $PMND$ 的体积.



20. (本小题满分 12 分)

已知抛物线 $\Gamma: y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 过抛物线上除原点外任一点 P 作抛物线准线的垂线, 垂足为 M , 直线 l 是 $\angle MPF$ 的角平分线.

(1) 求直线 l 与抛物线 Γ 交点的个数;

(2) 直线 l 与抛物线的准线相交于点 N , 过 N 作抛物线的切线, 切点为 Q (不与 P 点重合), 求 $\triangle NPQ$ 面积的最小值.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = x^2 - 2x - a \ln x$, $g(x) = ax$.

(1) 若 $a > 0$, 求函数 $F(x) = f(x) + g(x)$ 的极值;

(2) 若不等式 $\frac{\sin x}{2 + \cos x} \leq g(x)$ 对 $x \in [0, 2\pi]$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

请考生在第 22, 23 题中任选择一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分. 作答时, 用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目所对应的标号涂黑.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (本小题满分 10 分)

已知曲线 $C_1: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \end{cases}$ (t 为参数), 以直角坐标系的原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系,

曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho = 6 \sin \theta$.

(1) 求曲线 C_1 的普通方程和 C_2 的直角坐标方程;

(2) 若曲线 C_1 与 C_2 交于两点 A, B , 点 P 是曲线 C_2 上异于点 A, B 的任意一点, 求 $\triangle PAB$ 的面积 S 的最大值.

23. [选修 4-5: 坐标系与参数方程] (本小题满分 10 分)

已知函数 $f(x) = |x - 1|$.

(1) 解不等式 $f(x) + f(x + 4) \geq 8$;

(2) 若 $|a| < 1, |b| < 1$, 且 $a \neq 0$, 求证: $f(ab) > |a| f(\frac{b}{a})$.