成都市2020级高中毕业班第二次诊断性检测

数学(文科)参考答案及评分意见

第Ⅰ卷　(选择题,共60分)

一、选择题:(每小题5分,共60分)

1.C;　2. C;　3.B;　4. C　5. A;　6. B;　7. D　8. A;　9.B;　10. D;　11. A;　12.D.

第Ⅱ卷　(非选择题,共90分)

二、填空题:(每小题5分,共20分)

13. $\sqrt{2}$;　　14. $-\dfrac{3}{5}$;　　15. 1;　　16. $\sqrt{31}$.

三、解答题:(共70分)

17. 解:(Ⅰ)由题意,列联表如下:

报名班型	课　程		合　计
	"劳育课程"	"美育课程"	
文科班	35	35	70
理科班	10	20	30
合　计	45	55	100

……6分

(Ⅱ)$\because K^2=\dfrac{100\times(35\times20-35\times10)^2}{45\times55\times70\times30}=\dfrac{700}{297}\approx2.357<6.635$,　……10分

$\therefore$没有99%的把握认为"劳育课程""美育课程"的选择与文理科有关.　……12分

18. 解:(Ⅰ)设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q .

$\because a_1, a_2+3, a_3-6$ 成等差数列,

$\therefore 2(a_2+3)=a_1+a_3-6$.　……2分

$\therefore 2a_1q+6=a_1+a_1q^2-6$.　……3分

$\because q=3$,

$\therefore$ 解得 $a_1=3$.　……5分

$\therefore a_n=3^n$.　……6分

(Ⅱ)设 $b_n=na_n$,则 $b_n=n\cdot3^n$.

$\therefore T_n=3+2\times3^2+3\times3^3+\cdots+n\times3^n$　①

$\therefore 3T_n=3^2+2\times3^3+3\times3^4+\cdots+n\times3^{n+1}$　②

由①-②得,$-2T_n=3+3^2+3^3+\cdots+3^n-n\cdot3^{n+1}$　……8分

$\therefore -2T_n=\dfrac{3\times(1-3^n)}{1-3}-n\cdot3^{n+1}$　……10分

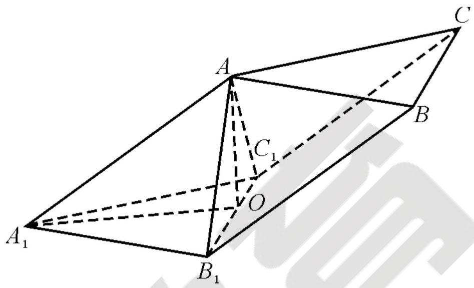
$\therefore T_n=\dfrac{(2n-1)3^{n+1}+3}{4}$.　　　　……12 分

19. 解:(Ⅰ)取 B_1C_1 的中点 O，连接 AO,A_1O.

$\because \triangle A_1B_1C_1$ 与 $\triangle AB_1C_1$ 均是边长为 2 的正三角形，

$\therefore AO\perp B_1C_1$,$A_1O\perp B_1C_1$,$A_1O=AO=\sqrt{3}$.

……2 分



$\therefore \angle AOA_1$ 为二面角 $A-B_1C_1-A_1$ 的平面角.

……3 分

$\because AA_1=\sqrt{6}$，

$\therefore A_1O^2+AO^2=A_1A^2$.

$\therefore A_1O\perp AO$.　　　　……5 分

$\therefore$平面 $AB_1C_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$.　　　　……6 分

(Ⅱ) $V_{A-BB_1C_1C}=V_{ABC-A_1B_1C_1}-V_{A-A_1B_1C_1}=2V_{A-A_1B_1C_1}$.　　　　……9 分

由(Ⅰ)知，$A_1O\perp AO$,$AO\perp B_1C_1$.

$\because A_1O\cap B_1C_1=O$,$B_1C_1\subset$面 $A_1B_1C_1$,$A_1O\subset$面 $A_1B_1C_1$,

$\therefore AO\perp$平面 $A_1B_1C_1$.

$\therefore AO$ 为三棱锥 $A-A_1B_1C_1$ 的高.　　　　……10 分

$\therefore V_{A-A_1B_1C_1}=\dfrac{1}{3}\times S_{\triangle A_1B_1C_1}\times AO=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 4\times\sqrt{3}=1$.　　　　……11 分

$\therefore$四棱锥 $A-BB_1C_1C$ 的体积为 2.　　　　……12 分

20. 解:(Ⅰ)由题意，设椭圆 C 的方程 $mx^2+ny^2=1(m>0,n>0,m\neq n)$.　　　　……1 分

$\because$ 椭圆 C 经过 $P(\sqrt{3},\dfrac{2\sqrt{6}}{3})$，$Q(\sqrt{6},\dfrac{2\sqrt{3}}{3})$ 两点，

$\therefore \begin{cases}3m+\dfrac{8}{3}n=1\\ 6m+\dfrac{4}{3}n=1\end{cases}$. 解得 $\begin{cases}m=\dfrac{1}{9}\\ n=\dfrac{1}{4}\end{cases}$.　　　　……3 分

$\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$.　　　　……5 分

(Ⅱ)当直线 l 斜率存在时，设直线 l 的方程为 $y=kx+1$, $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$.

则 $D(\dfrac{3x_2}{2},\dfrac{3y_2}{2})$,$E(x_1+\dfrac{3x_2}{2},y_1+\dfrac{3y_2}{2})$.

$\because$ 点 A,B,E 均在椭圆 C 上，

$\therefore \dfrac{x_1^2}{9}+\dfrac{y_1^2}{4}=1$,$\dfrac{x_2^2}{9}+\dfrac{y_2^2}{4}=1$,$\dfrac{(x_1+\frac{3x_2}{2})^2}{9}+\dfrac{(y_1+\frac{3y_2}{2})^2}{4}=1$.

$\therefore 4x_1x_2+9y_1y_2+27=0$.　　　　……7 分

$\therefore (4+9k^2)x_1x_2+9k(x_1+x_2)+36=0$.　　　　……8 分

由 $\begin{cases} y=kx+1, \\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1 \end{cases}$ 消去 y，得 $(9k^2+4)x^2+18kx-27=0$.

显然 $\Delta=432(3k^2+1)>0$.

$\therefore x_1+x_2=\dfrac{-18k}{9k^2+4}$，$x_1x_2=\dfrac{-27}{9k^2+4}$. ……9 分

$\therefore \dfrac{-27}{9k^2+4}\times(4+9k^2)-\dfrac{18k}{9k^2+4}\times 9k+36=0$.

$\therefore 9k^2=4, k=\pm\dfrac{2}{3}$. ……11 分

当直线 l 斜率不存在时，$E(0,\pm1)$ 不合题意.

$\therefore$ 所求直线 l 的方程为 $y=\pm\dfrac{2}{3}x+1$. ……12 分

21. 解：(Ⅰ)当 $a=1$ 时，$f(x)=\dfrac{e^x}{x}$.

$\therefore f'(x)=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$. ……2 分

$\because x>0$，

$\therefore$ 当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$.

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 单调递减区间为 $(0,1)$，单调递增区间为 $(1,+\infty)$. ……4 分

(Ⅱ)$\because x>0, a>0$，$\dfrac{e^x}{ex^a}=\ln e^x-\ln x^a=\ln\dfrac{e^x}{x^a}$，

令 $t=\dfrac{e^x}{x^a}>0$，则 $\dfrac{t}{e}=\ln t$.

令 $h(t)=\ln t-\dfrac{t}{e}$，则 $h'(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{e}$.

$\therefore$ 当 $0<t<e$ 时，$h'(t)>0$；当 $t>e$ 时，$h'(t)<0$.

$\therefore$ 函数 $h(t)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减.

$\because h(e)=0$，

$\therefore$ 方程 $\dfrac{t}{e}=\ln t$ 有唯一解 $t=e$.

$\therefore$ 方程 $\dfrac{e^x}{ex^a}=x-a\ln x$ 有两个不等的实数解等价于方程 $e=\dfrac{e^x}{x^a}$ 有两个不相等的实数解.

……7 分

等价于方程 $a\ln x=x-1$ 有两个不相等的实数解.

构造函数 $k(x)=a\ln x-x+1$，则 $k'(x)=\dfrac{a}{x}-1$.

$\because a>0$，

$\therefore$ 当 $0<x<a$ 时，$k'(x)>0$；当 $x>a$ 时，$k'(x)<0$.

$\therefore$ 函数 $k(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递增，在 $(a,+\infty)$ 上单调递减.

$\because x\to0^+, k(x)\to-\infty$；$x\to+\infty, k(x)\to-\infty$.

$\therefore$ 只需要 $k(a)=a\ln a-a+1>0$，即 $\ln a+\dfrac{1}{a}-1>0$. ……9 分

构造函数 $m(a)=\ln a+\dfrac{1}{a}-1$，则 $m'(a)=\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a^2}$.

$\therefore$ 当 $0<a<1$ 时，$m'(a)<0$；当 $a>1$ 时，$m'(a)>0$.

$\therefore$ 函数 $m(a)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

$\because m(1)=0$，

$\therefore$ 当 $a\neq1$ 时，$\ln a+\dfrac{1}{a}-1>0$ 恒成立. ……11 分

$\therefore$ a 的取值范围为 $(0,1)\cup(1,+\infty)$. ……12 分

22. 解：(Ⅰ) $\because$ 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=3t^2\\y=3t\end{cases}$（$t$ 为参数），

$\therefore$ 曲线 C 的普通方程为 $y^2=3x$. ……2 分

$\because$ 直线 l 的极坐标方程为 $2\rho\sin(\theta+\dfrac{\pi}{6})=3$，

$\therefore$ $\sqrt{3}\rho\sin\theta+\rho\cos\theta=3$. ……3 分

$\because$ $x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$，

$\therefore$ 直线 l 的直角坐标方程为 $x+\sqrt{3}y-3=0$. ……5 分

(Ⅱ)由(Ⅰ)知，点 P 在直线 l 上，

$\therefore$ 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=-3-\dfrac{\sqrt{3}}{2}m\\y=2\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}m\end{cases}$（$m$ 为参数），……7 分

代入 $y^2=3x$ 得，$m^2+14\sqrt{3}m+84=0$.

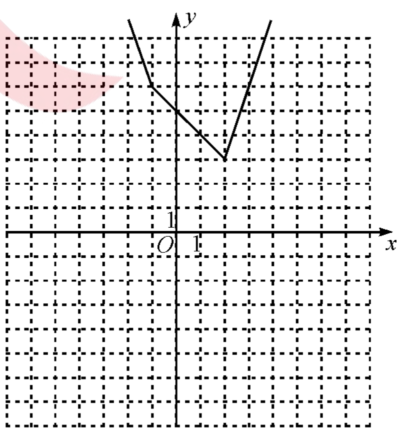
设 m_1,m_2 是上述方程的两根，

$\therefore$ $\Delta>0,m_1+m_2=-14\sqrt{3},m_1m_2=84>0$. ……9 分

$\therefore$ $|PA|+|PB|=|m_1|+|m_2|=|m_1+m_2|=14\sqrt{3}$. ……10 分

23. 解：(Ⅰ)由题得，$f(x)=|x+1|+2|x-2|=\begin{cases}-3x+3,x\leqslant-1\\-x+5,-1<x<2\\3x-3,x\geqslant2.\end{cases}$ ……3 分

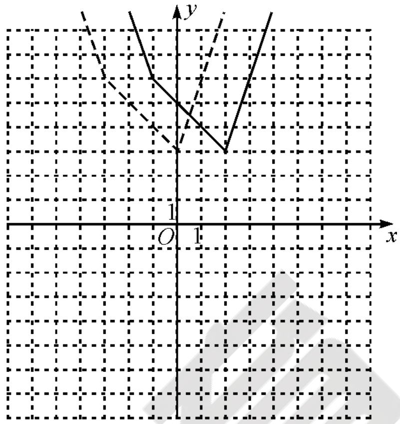
函数 $y=f(x)$ 的图象为



……5 分

(Ⅱ)函数 $y=f(x)$ 的图象向左平移 2 个单位长度后得到函数 $y=f(x+2)$ 的图象，$y=f(x)$ 的图象与 $y=f(x+2)$ 的图象如右图所示.

……7 分



当 $x\in(0,2)$ 时,由 $f(x+2)=f(x)$ 解得,$x=\dfrac{1}{2}$.

……9 分

由图象可知不等式 $f(x+2)>f(x)$ 的解集为 $(\dfrac{1}{2},+\infty)$.　　……10 分