成都市2020级高中毕业班第一次诊断性检测

数学(文科)参考答案及评分意见

第Ⅰ卷　(选择题,共60分)

一、选择题:(每小题5分,共60分)

1. C；　2. A；　3. B；　4. C；　5. C；　6. D；　7. B；　8. D；　9. B；　10. C；　11. A；　12. D.

第Ⅱ卷　(非选择题,共90分)

二、填空题:(每小题5分,共20分)

13. $\frac{1}{3}$；　14. 2；　15. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$；　16. ②③④.

三、解答题:(共70分)

17. **解:**(Ⅰ)由 $(0.004\times 2+0.022+0.030+0.028+m)\times 10=1$,　……2分

解得 $m=0.012$.　……4分

(Ⅱ)由题意知不低于90分的队伍有 $50\times 0.04=2$ 支,故评分在 $[85,90)$ 的队伍有2支.　……5分

评分在 $[80,90)$ 分的队伍有 $50\times 0.12=6$ 支.　……6分

记评分落在 $[80,85)$ 的4支队伍为 A_1,A_2,A_3,A_4；评分落在 $[85,90)$ 的2支队伍为 B_1,B_2.

则从评分在 $[80,90)$ 的队伍中任选两支队伍的基本事件有:(A_1,A_2),(A_1,A_3),(A_1,A_4),(A_1,B_1),(A_1,B_2),(A_2,A_3),(A_2,A_4),(A_2,B_1),(A_2,B_2),(A_3,A_4),(A_3,B_1),(A_3,B_2),(A_4,B_1),(A_4,B_2),(B_1,B_2),共15个.　……9分

其中两支队伍至少有一支队伍评分不低于85分的基本事件有:(A_1,B_1),(A_1,B_2),(A_2,B_1),(A_2,B_2),(A_3,B_1),(A_3,B_2),(A_4,B_1),(A_4,B_2),(B_1,B_2),共9个.　……11分

故所求概率为 $P=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$.　……12分

18. **解:**(Ⅰ)$\because \frac{b}{a}=\sin C+\cos C$,

由正弦定理知 $\frac{\sin B}{\sin A}=\sin C+\cos C$,即 $\sin B=\sin A\sin C+\sin A\cos C$.　……1分

在△ABC 中,由 $B=\pi-(A+C)$,

$\therefore \sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C=\sin A\sin C+\sin A\cos C$.　……3分

$\therefore \cos A\sin C=\sin A\sin C$. $\because C\in(0,\pi)$,$\therefore \sin C\neq 0$.　……4分

$\therefore \sin A=\cos A$.　……5分

$\because A\in(0,\pi)$,$\therefore A=\frac{\pi}{4}$.　……6分

（Ⅱ）若选择条件①，由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，得 $a\sin C=c\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}c=2$.

$\therefore c=2\sqrt{2}$. ……9 分

又 $2\sqrt{2}\sin B=3\sin C$，即 $2\sqrt{2}b=3c$.

$\therefore b=3$. ……11 分

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 3\times 2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}=3$. ……12 分

若选择条件②，由 $2\sqrt{2}\sin B=3\sin C$，即 $2\sqrt{2}b=3c$.

设 $c=2\sqrt{2}m$，$b=3m(m>0)$. ……7 分

则 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=5m^2$. $\therefore a=\sqrt{5}m$. ……9 分

由 $ac=2\sqrt{10}$，得 $m=1$.

$\therefore a=\sqrt{5}$，$b=3$，$c=2\sqrt{2}$. ……11 分

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 3\times 2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}=3$. ……12 分

19. **解**：（Ⅰ）由题意得 $DE\perp AC$，$DE\perp DP$. ……1 分

$\because$ 平面 $PDE\perp$ 平面 $ABED$，$PD\subset$ 平面 PDE，

平面 $PDE\cap$ 平面 $ABED=DE$，$PD\perp DE$，

$\therefore$ $PD\perp$ 平面 $ABED$. ……3 分

$\because$ D 为 AC 的中点，

$\therefore$ $DA=DE=DP=1$. ……4 分

$\therefore V_{P-ABED}=\frac{1}{3}S_{ABED}\cdot DP=\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}\times 1=\frac{1}{2}$.

$\therefore$ 四棱锥 $P-ABED$ 的体积为 $\frac{1}{2}$. ……6 分

（Ⅱ）$\because$ $DE\,/\!/\,AB$，$DE\not\subset$ 平面 PAB，$AB\subset$ 平面 PAB，

$\therefore$ $DE\,/\!/$ 平面 PAB. ……8 分

$\because$ $DE\subset$ 平面 PDE，平面 $PDE\cap$ 平面 $PAB=l$，

$\therefore DE\,/\!/\,l$. ……9 分

由图① $DE\perp AC$，得 $DE\perp DA$，$DE\perp DP$，

$\therefore$ $l\perp DA$，$l\perp DP$. ……10 分

$\because$ DA，$DP\subset$ 平面 ADP，$DA\cap DP=D$，

$\therefore$ $l\perp$ 平面 ADP. ……12 分

20. **解**：（Ⅰ）由 $\triangle DF_1F_2$ 为等边三角形，$|DF_1|=|DF_2|=a$，得 $a=2c$（c 为半焦距）. ……1 分

$\because$ $|AF_1|+|AF_2|=2a$，$|BF_1|+|BF_2|=2a$，

$\therefore$ $\triangle F_1AB$ 的周长为 $4a=8$，得 $a=2$. ……2 分

$\therefore c=1$，$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$.

$\therefore$ 椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ……4 分

(Ⅱ)由(Ⅰ)知 $F_2(1,0)$，且直线 l 斜率不为 0.

设直线 $l: x=my+1$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

由 $\begin{cases} x=my+1, \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1 \end{cases}$ 消去 x，得 $(3m^2+4)y^2+6my-9=0$.

显然 $\Delta=144(m^2+1)>0$. ……5 分

$\therefore y_1+y_2=\dfrac{-6m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=\dfrac{-9}{3m^2+4}$. ……6 分

由△ F_1AB 面积 $S=\dfrac{1}{2}\cdot|F_1F_2|\cdot|y_1-y_2|=|y_1-y_2|$.

而 $|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{\left(\dfrac{-6m}{3m^2+4}\right)^2-4\cdot\dfrac{-9}{3m^2+4}}=\dfrac{12\sqrt{m^2+1}}{3m^2+4}$.

……9 分

设 $t=\sqrt{m^2+1}\geqslant 1$，则 $|y_1-y_2|=\dfrac{12t}{3t^2+1}=\dfrac{12}{3t+\dfrac{1}{t}}$.

$\because y=3t+\dfrac{1}{t}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore$ 当 $t=1$ 时，$\left(3t+\dfrac{1}{t}\right)_{\min}=4$. ……11 分

即当 $m=0$ 时，$S=|y_1-y_2|$ 取得最大值 3，此时直线 l 的方程为 $x=1$. ……12 分

21. **解**：(Ⅰ)记 $g(x)=f(x)-x=\ln x-x+a-1$.

则 $g(x)\leqslant 0$ 恒成立，即 $g(x)_{\max}\leqslant 0$. ……1 分

$\because g'(x)=\dfrac{1-x}{x}$，$\therefore g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减. ……3 分

$\therefore g(x)_{\max}=g(1)\leqslant 0$. 解得 $a\leqslant 2$.

$\therefore$实数 a 的取值范围是 $(-\infty,2]$. ……5 分

(Ⅱ)记 $h(x)=\dfrac{(x-1)e^x}{e^a}-f(x)=\dfrac{(x-1)e^x}{e^a}-\ln x+1-a\ (x>0)$.

$\because h'(x)=xe^{x-a}-\dfrac{1}{x}$，$h'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. ……6 分

由 $a\in(0,1]$，知 $h'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}e^{\frac{1}{2}-a}-2<0$，$h'(1)=e^{1-a}-1\geqslant 0$.

$\therefore \exists x_0\in\left(\dfrac{1}{2},1\right]$，$h'(x_0)=0$. 即 $x_0e^{x_0-a}=\dfrac{1}{x_0}$.　…(＊) ……7 分

$\therefore$ 当 $x\in(0,x_0)$，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减；当 $x\in(x_0,+\infty)$，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增.

$\therefore h(x)_{\min}=h(x_0)=(x_0-1)e^{x_0-a}-\ln x_0+1-a$.　…(＊＊) ……8 分

由(＊)式，可得 $e^{x_0-a}=\dfrac{1}{x_0^2}$，$x_0-a=-2\ln x_0$.

代入(＊＊)式，得 $h(x_0)=\dfrac{x_0-1}{x_0^2}-3\ln x_0-x_0+1$. ……9 分

由(Ⅰ)知，当 $a=2$ 时有 $\ln x\leqslant x-1$，故 $-\ln x_0\geqslant 1-x_0$.

$\therefore h(x_0)\geqslant\dfrac{x_0-1}{x_0^2}-3(x_0-1)-x_0+1=\dfrac{(1-x_0)(2x_0-1)(2x_0+1)}{x_0^2}$. ……11 分

由 $x_0\in(\dfrac{1}{2},1]$，$\therefore h(x_0)\geqslant 0$.

故 $h(x)\geqslant 0$，即 $f(x)\leqslant\dfrac{(x-1)e^x}{e^a}$，原不等式得证. ……12 分

22. **解**：(Ⅰ)由圆 C_1 的参数方程消去参数 t，得圆 C_1 的普通方程为

$(x-2)^2+y^2=1$，圆心 $A(2,0)$. ……2 分

把 $x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$ 代入 $(x-2)^2+y^2=1$， ……3 分

化简得圆 C_1 的极坐标方程为 $\rho^2-4\rho\cos\theta+3=0$. ……5 分

(Ⅱ)由题意，在极坐标系中，点 $A(2,0)$.

$\because$点 B 在曲线 C_2 上，设 $B(2-2\cos\theta,\theta)$. ……6 分

在$\triangle AOB$ 中，由余弦定理有 $AB^2=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cdot\cos\angle AOB$，

即 $3=4+(2-2\cos\theta)^2-2\times 2(2-2\cos\theta)\cos\theta$.

化简得 $12\cos^2\theta-16\cos\theta+5=0$. ……8 分

解得 $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ 或 $\cos\theta=\dfrac{5}{6}$.

故 $\rho=2-2\cos\theta=1$ 或 $\rho=2-2\cos\theta=\dfrac{1}{3}$.

$\therefore$点 B 的极径为 1 或 $\dfrac{1}{3}$. ……10 分

23. **解**：(Ⅰ)当 $a=1,b=\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)=|x-3|+|x+2|$. ……1 分

当 $x\leqslant -2$ 时，$f(x)=1-2x\geqslant 7$，解得 $x\leqslant -3$； ……3 分

当 $-2<x<3$ 时，$f(x)=5\geqslant 7$，此时无解； ……4 分

当 $x\geqslant 3$ 时，$f(x)=2x-1\geqslant 7$，解得 $x\geqslant 4$. ……2 分

综上，不等式 $f(x)\geqslant 7$ 的解集为 $(-\infty,-3]\cup[4,+\infty)$. ……5 分

(Ⅱ)由 $f(x)=|x-3a|+|x+4b|\geqslant|x+4b-(x-3a)|=|3a+4b|$，

当且仅当 $-4b\leqslant x\leqslant 3a$ 时，等号成立.

$\because a\geqslant 0,b\geqslant 0$.

$\therefore f(x)_{\min}=|3a+4b|=3a+4b=6$. ……7 分

由柯西不等式，得 $\sqrt{3a}+\sqrt{b}=1\cdot\sqrt{3a}+\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{4b}\leqslant\sqrt{1^2+(\dfrac{1}{2})^2}\cdot\sqrt{3a+4b}=\dfrac{\sqrt{30}}{2}$.

……9 分

当且仅当 $2=\dfrac{\sqrt{3a}}{\sqrt{4b}}$ 时，即 $a=\dfrac{8}{5},b=\dfrac{3}{10}$ 等号成立.

综上，$\sqrt{3a}+\sqrt{b}$ 的最大值为 $\dfrac{\sqrt{30}}{2}$. ……10 分