高 2023 届高三一诊模拟考试
数学参考答案（理科）

一．选择题

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C	B	B	A	A	C	D	C	A	B	D	D

二．填空题

13、-14　14、4　15、2　16、$[-2,16]$

三．解答题

17. 解：（1）因为 $\sin A=\sin 2B=2\sin B\cos B$，

所以 $\cos B=\dfrac{\sin A}{2\sin B}=\dfrac{a}{2b}=\dfrac{6}{2\times 5}=\dfrac{3}{5}$，因为 $B\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以 $\sin B=\dfrac{4}{5}$，

又 $\sin A=\sin 2B=2\sin B\cos B=\dfrac{24}{25}$，且 A 为锐角，所以 $\cos A=\dfrac{7}{25}$，

所以 $\cos C=-\cos(A+B)=\sin A\sin B-\cos A\cos B=\dfrac{3}{5}$.

因为 $\cos C=\cos B$．所以 $C=B$．所以 $c=b=5$．……………………………………………5 分

（2）设 $AM=m$，$AN=n$，根据题设有 $S_{\triangle AMN}=\dfrac{1}{2}S_{\triangle ABC}$，

所以 $\dfrac{1}{2}mn\sin A=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}bc\sin A$，可得 $mn=\dfrac{25}{2}$，……………………………………………7 分

所以 $MN^2=m^2+n^2-2mn\cos A\geq 2mn-\dfrac{14}{25}mn=18$，当且仅当 $m=n=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立.

所以 MN 的最小值为 $3\sqrt{2}$．……………………………………………………………12 分

18.解：（1）由样本频率分布表可知，样本中获一等奖的 6 人，获二等奖的 8 人，获三等奖的 16 人，共 30 人，则 70 人没有获奖，

所以从该样本中随机抽取 2 名学生的竞赛成绩，这 2 名学生恰有一名学生获奖的概率为

$P=\dfrac{C_{30}^1C_{70}^1}{C_{100}^2}=\dfrac{30\times 70}{50\times 99}=\dfrac{14}{33}$．……………………………………………………………5 分

（2）因为该校所有参赛学生的成绩 X 近似地服从正态分布 $N(64,225)$，所以 $\mu=64$，

所以 $P(X>64)=\dfrac{1}{2}$，即从所有参赛学生中随机抽取 1 名学生，该生成绩在 64 分以上的概率为 $\dfrac{1}{2}$，所以随机变量 $\xi\sim B\left(4,\dfrac{1}{2}\right)$，

所以 $P(\xi=k)=C_4^k\left(\dfrac{1}{2}\right)^k\left(\dfrac{1}{2}\right)^{4-k}=C_4^k\left(\dfrac{1}{2}\right)^4\ (k=0,1,2,3,4)$，

所以 $P(\xi=0)=C_4^0\left(\dfrac{1}{2}\right)^4=\dfrac{1}{16}$，$P(\xi=1)=C_4^1\left(\dfrac{1}{2}\right)^4=\dfrac{1}{4}$，

$P(\xi=2)=C_4^2\left(\dfrac{1}{2}\right)^4=\dfrac{3}{8}$，$P(\xi=3)=C_4^3\left(\dfrac{1}{2}\right)^4=\dfrac{1}{4}$，

$P(\xi=4)=C_4^4\left(\dfrac{1}{2}\right)^4=\dfrac{1}{16}$，……………………………………………………7 分

所以 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3	4
P	$\dfrac{1}{16}$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{3}{8}$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{16}$

………………………… 10 分

所以 $E(\xi)=4\times\dfrac{1}{2}=2$．……………………………………………………………12 分

19. 解：(1)证明：$\triangle ABC$ 是边长为 6 的等边三角形，点 M，N 分别是边 AB，AC 的三等分点，且 $AM=\dfrac{1}{3}AB$，

$CN=\frac{1}{3}CA$，

所以 $AM=2,BM=4,AN=4,CN=2,\angle A=60°$，

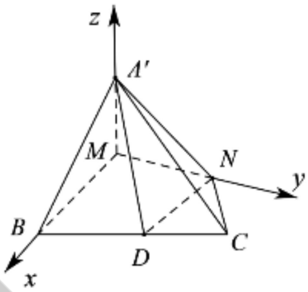
所以由余弦定理得 $MN^2=AM^2+AN^2-2AM\cdot AN\cos A=4+16-2\times2\times4\times\frac{1}{2}=12$，

所以 $MN^2+AM^2=12+4=AN^2$，所以 $MN\perp AB$，

所以 $MN\perp MB,MN\perp A'M$，　　因为 $\angle A'MB=90°$，所以 $A'M\perp MB$，

因为 $MN\cap MB=M$，　　所以 $A'M\perp$ 平面 $MBCN$；……………………………………5 分

(2)由（1）可知 MB,MN,MA' 两垂直，所以以 M 为原点，MB,MN,MA' 所在的直线分别为 x,y,z 轴，建立空间直角坐标系，如图所示，



则 $M(0,0,0),N(0,2\sqrt{3},0),B(4,0,0),A'(0,0,2),C(1,3\sqrt{3},0)$，

所以 $\overrightarrow{MN}=(0,2\sqrt{3},0),\overrightarrow{MA'}=(0,0,2),\overrightarrow{NA'}=(0,-2\sqrt{3},2),\overrightarrow{BC}=(-3,3\sqrt{3},0)$，

因为 $MN\perp MB,MN\perp A'M$，$A'M\cap MB=M$，

所以 $MN\perp$ 平面 $A'MB$，　$\overrightarrow{MN}=(0,2\sqrt{3},0)$ 为平面 $A'MB$ 的一个法向量，………………7 分

假设线段 BC 上存在点 D，设 $\overrightarrow{BD}=\lambda\overrightarrow{BC}(\lambda>0)$，则 $\overrightarrow{BD}=\lambda(-3,3\sqrt{3},0)=(-3\lambda,3\sqrt{3}\lambda,0)$，

所以 $D(4-3\lambda,3\sqrt{3}\lambda,0)$（$0<\lambda\le1$），所以 $\overrightarrow{A'D}=(4-3\lambda,3\sqrt{3}\lambda,-2)$，

设平面 $A'ND$ 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，则

$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{NA'}=-2\sqrt{3}y+2z=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{A'D}=(4-3\lambda)x+3\sqrt{3}\lambda y-2z=0\end{cases}$，令 $z=\sqrt{3}$，则 $\vec{m}=\left(\frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{3}\lambda}{4-3\lambda},1,\sqrt{3}\right)$，……9 分

因为平面 $A'ND$ 与平面 $A'MB$ 所成锐二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{39}}{13}$，

所以 $\left|\cos\langle\vec{m},\overrightarrow{MN}\rangle\right|=\left|\frac{\vec{m}\cdot\overrightarrow{MN}}{|\vec{m}||\overrightarrow{MN}|}\right|=\left|\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{3}\lambda}{4-3\lambda}\right)^2+1+3}}\right|=\frac{\sqrt{39}}{13}$，

化简得 $3(63\lambda^2-132\lambda+76)=13(4-3\lambda)^2$，　　………………………10 分

$18\lambda^2-21\lambda+5=0$，解得 $\lambda=\frac{1}{3}$ 或 $\lambda=\frac{5}{6}$，

所以在线段 BC 上是存在点 D，使平面 $A'ND$ 与平面 $A'MB$ 所成锐二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{39}}{13}$，

此时 $\lambda=\frac{1}{3}$ 或 $\lambda=\frac{5}{6}$，　　……………………………………………………12 分

20. 解：（1）由椭圆的对称性知，$A(2,\sqrt{3})$，$C(-2,\sqrt{3})$ 必在椭圆上，则 $B(\frac{3}{2},-\sqrt{3})$ 不在椭圆上，有 $D(3,\frac{\sqrt{7}}{2})$ 在椭圆上，因此 $\begin{cases}\frac{4}{a^2}+\frac{3}{b^2}=1\\ \frac{9}{a^2}+\frac{7}{4b^2}=1\end{cases}$，解得 $a=4,b=2$，

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$.……………………………………………5 分

（2）当直线 l 的斜率不存在时，设 $l:x=m(-4<m<4)$，则点 $A(m,\frac{1}{2}\sqrt{16-m^2}),B(m,-\frac{1}{2}\sqrt{16-m^2})$，

因 $\angle AOB=90°$，则 $|m|=\frac{1}{2}\sqrt{16-m^2}$，解得 $|m|=\frac{4\sqrt{5}}{5}$，

即原点 O 到直线 l 的距离为 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ……………………………………………8 分

当直线 l 的斜率存在时，设直线 $l:y=kx+t$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases}y=kx+t\\ x^2+4y^2=16\end{cases}$ 消去 y 并整理得：$(1+4k^2)x^2+8ktx+4t^2-16=0$，

有 $\Delta=64k^2t^2-4(1+4k^2)(4t^2-16)>0\Leftrightarrow 16k^2+4>t^2$， $x_1+x_2=\dfrac{-8kt}{1+4k^2}$， $x_1x_2=\dfrac{4t^2-16}{1+4k^2}$，

因 $\angle AOB=90^\circ$， 则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+(kx_1+t)(kx_2+t)=(1+k^2)x_1x_2+kt(x_1+x_2)+t^2$

$=\dfrac{(1+k^2)(4t^2-16)}{1+4k^2}-\dfrac{8k^2t^2}{1+4k^2}+t^2=\dfrac{5t^2-16-16k^2}{1+4k^2}=0$，整理得 $t^2=\dfrac{16}{5}(1+k^2)$，满足 $\Delta>0$，

原点 O 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|t|}{\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{\dfrac{t^2}{1+k^2}}=\sqrt{\dfrac{16}{5}}=\dfrac{4\sqrt5}{5}$，

综上得：原点 O 到直线 l 的距离恒为 $\dfrac{4\sqrt5}{5}$，即直线 l 与圆 $x^2+y^2=\dfrac{16}{5}$ 相切，

所以直线 l 与定圆 $O:x^2+y^2=r^2(r>0)$ 相切， $r=\dfrac{4\sqrt5}{5}$.……………………………12 分

21.解：（1）由已知 $u'(x)=\dfrac{1}{x}-a,$

当 $a\le0$ 时， $f'(x)\ge0$ 在 $(0,+\infty)$ 恒成立， $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；………………………2 分

当 $a>0$ 时，由 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-a=0$ 得 $x=\dfrac{1}{a}$，

若 $0<x<\dfrac{1}{a}$ 时， $f'(x)>0,$ $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$ 上单调递增，

若 $x>\dfrac{1}{a}$ 时， $f'(x)<0,$ $f(x)$ 在 $\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递减；

综上，当 $a\le0$ 时， $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$，无单调递减区间；

当 $a>0$ 时， $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,\dfrac{1}{a})$，单调递减区间为 $(\dfrac{1}{a},+\infty)$；…………5 分

（2）解：由题意得： $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+ax-(ax+1)\ln x(a\in R)(x>0),$

$g(x)=f'(x)=x+a-a\ln x-\dfrac{ax+1}{x}=x-\dfrac{1}{x}-a\ln x(x>0),$

$g'(x)=1+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{a}{x}=\dfrac{x^2-ax+1}{x^2}(x>0)$　　令 $h(x)=x^2-ax+1(x>0),\Delta=a^2-4$

当 $-2\le a\le 2$ 时， $h(x)\ge0$， $g'(x)\ge0$， $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增；不满足 $g(x)=f'(x)=0$ 有三个不同实根；

当 $a<-2$ 时，$\because h(x)=x^2-ax+1(x>0)$，　$\therefore h(x)>0$， $g'(x)>0$， $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增；也不满足 $g(x)=f'(x)=0$ 有三个不同实根；

当 $a>2$ 时，由 $h(x)=0$ 得 $x_4=\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},x_5=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$，

$\therefore g(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$ 上递增，在 $\left(\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$ 上递减，在 $\left(\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty\right)$ 上递增.

$\because g(x)=f'(x)=0$ 有三个不同实根 $x_1,x_2,x_3(x_1<x_2<x_3)$ ，　　…………7 分

显然 $g(1)=0$，且 $\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}<1,\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}>1$，　　$\therefore x_2=1,0<x_1<1,x_3>1$.

由 $g(x)=x-\dfrac{1}{x}-a\ln x=0$ 的结构特征得 $g(m)=-g(\dfrac{1}{m})$，

$\therefore g(x_1)=-g(\dfrac{1}{x_1})$　$\therefore g(x_3)=g(\dfrac{1}{x_1})=0$，即 $\dfrac{1}{x_1}=x_3$，即 $x_1x_3=1$　由 $g(x)$ 的单调性可知，

当 $x_1<x<x_2$ 时， $g(x)>0$， $f(x)$ 递增；　当 $x_2<x<x_3$ 时， $g(x)>0$， $f(x)$ 递减.

$\therefore f(x_1)<f(x_2),f(x_3)<f(x_2)$.　　……………………………………8 分

由 $g(x_3)=x_3-\dfrac{1}{x_3}-a\ln x_3$ 得 $a=\dfrac{x_3{}^2-1}{x_3\ln x_3}$ ，　又 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-\ln x+a(x-x\ln x)$，

$\therefore f(x_3)-f(x_1)=f(x_3)-f(\frac{1}{x_3})=\frac{1}{2}(x_3^{\ 2}-\frac{1}{x_3^{\ 2}})-2\ln x_3+a(x_3-x_3\ln x_3-\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_3}\ln\frac{1}{x_3})$,

$\therefore a(x_3-x_3\ln x_3-\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_3}\ln\frac{1}{x_3})=\frac{(x_3^{\ 2}-1)^2}{x_3^{\ 2}\ln x_3}-\frac{x_3^{\ 4}-1}{x_3^{\ 2}}$,

$\therefore f(x_3)-f(x_1)=\frac{1}{2\ln x_3}[2\left(x_3^{\ 2}+\frac{1}{x_3^{\ 2}}\right)-\left(x_3^{\ 2}-\frac{1}{x_3^{\ 2}}\right)\ln x_3-4\ln^2 x_3-4]$,

令 $x_3^{\ 2}=t(t>1)$, 则 $2\left(x_3^{\ 2}+\frac{1}{x_3^{\ 2}}\right)-\left(x_3^{\ 2}-\frac{1}{x_3^{\ 2}}\right)\ln x_3-4\ln^2 x_3-4]=4\left(t+\frac{1}{t}-2\right)-\left(t-\frac{1}{t}\right)\ln t-2\ln^2 t$,

令 $G(t)=4\left(t+\frac{1}{t}-2\right)-\left(t-\frac{1}{t}\right)\ln t-2\ln^2 t(t>1)$，　$\therefore G'(t)=\frac{3(t^2-1)-(t^2+4t+1)\ln t}{t^2}$,

令 $\varphi(t)=3(t^2-1)-(t^2+4t+1)\ln t(t>1)$,

$\varphi'(t)=5t-\frac{1}{t}-2(t+2)\ln t-4$，　$\varphi''(t)=\frac{1}{t^2}-\frac{4}{t}-2\ln t+3$，　$\varphi'''(t)=\frac{2(t-1)^2}{t^3}<0$,

$\therefore \varphi''(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上递减，　$\therefore \varphi''(t)<\varphi''(1)=0$，　$\therefore \varphi'(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上递减，　$\therefore \varphi'(t)<\varphi'(1)=0$,

$\therefore \varphi'(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上递减，　$\therefore \varphi(t)<\varphi(1)=0$，则 $G'(t)<0$,

$\therefore G(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上递减　，　$\therefore G(t)<G(1)=0$,

$\therefore f(x_3)<f(x_1)$　，　　$\therefore f(x_3)<f(x_1)<f(x_2)$,

综上：$f(x_1),f(x_2),f(x_3)$ 的大小关系为：$f(x_3)<f(x_1)<f(x_2)$. ……………………12 分

22. 解：（1）曲线 C 的平面直角坐标系方程为 $(x-1)^2+y^2=4$,

故曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2-2\rho\cos\theta-3=0$.　……………………………………4 分

（2）设直线 l 的倾斜角为 α，则 $E(\rho_1,\alpha),F(\rho_2,\alpha)$,

$\because \rho^2-2\rho\cos\alpha-3=0$，由韦达定理可知 $\rho_1\rho_2=-3$.

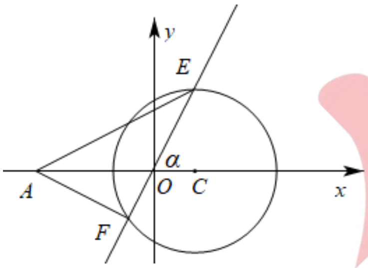
由余弦定理可知 $|AE|=\sqrt{OA^2+OE^2-2OA\cdot OE\cdot\cos\angle AOE}=\sqrt{9+\rho_1^2-6\cdot\rho_1\cdot\cos(\pi-\alpha)}$

$=\sqrt{\rho_1^2+3(2\rho_1\cos\alpha+3)}=\sqrt{\rho_1^2+3\rho_1^2}=2|\rho_1|$,

$|AF|=\sqrt{OA^2+OF^2-2OA\cdot OF\cdot\cos\angle AOF}=\sqrt{9+\rho_2^2+6\cdot\rho_2\cdot\cos\alpha}$

$=\sqrt{\rho_2^2+3(2\rho_2\cos\alpha+3)}=\sqrt{\rho_2^2+3\rho_2^2}=2|\rho_2|$,

$\therefore |AE||AF|=4|\rho_1\rho_2|=12$. ……………………………………………………………10 分



23.解：（1）因为 $|x-1|-|x-2|\le|x-1-x+2|=1$，所以 $a+b+c\ge1$,

因为 $a^2+b^2\ge2ab$，$b^2+c^2\ge2bc$，$c^2+a^2\ge2ac$,

所以 $2a^2+2b^2+2c^2\ge2ab+2bc+2ac$,

所以 $3a^2+3b^2+3c^2\ge a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac=(a+b+c)^2\ge1$,

故 $a^2+b^2+c^2\ge\frac{1}{3}$.……………………………………………………………………5 分

（2）因为 $a^2+b^2\ge2ab$，所以 $2\left(a^2+b^2\right)\ge a^2+b^2+2ab=\left(a+b\right)^2$,

即 $a^2+b^2\ge\frac{(a+b)^2}{2}$，两边开平方得 $\sqrt{a^2+b^2}\ge\frac{\sqrt{2}}{2}|a+b|=\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$,

同理可得 $\sqrt{c^2+b^2}\ge\frac{\sqrt{2}}{2}(c+b)$，$\sqrt{c^2+a^2}\ge\frac{\sqrt{2}}{2}(c+a)$,

三式相加，得 $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\ge\sqrt{2}(a+b+c)\ge\sqrt{2}$.…………………10 分