# 高 2023 届高三一诊模拟考试
# 数学参考答案（文科）

## 一．选择题

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| C | B | B | A | C | D | D | A | C | A | D | B |

## 二．填空题

13、5　14、4　15、2　16、$-2$

## 三．解答题

17. 解：（1）因为$\sin A=\sin 2B=2\sin B\cos B$，

所以$\cos B=\dfrac{\sin A}{2\sin B}=\dfrac{a}{2b}=\dfrac{6}{2\times 5}=\dfrac{3}{5}$，因为$B\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以$\sin B=\dfrac{4}{5}$，

又$\sin A=\sin 2B=2\sin B\cos B=\dfrac{24}{25}$，且 A 为锐角，所以$\cos A=\dfrac{7}{25}$，

所以$\cos C=-\cos(A+B)=\sin A\sin B-\cos A\cos B=\dfrac{3}{5}$.

因为$\cos C=\cos B$．所以$C=B$．所以$c=b=5$．……………………………………………5 分

（2）设$AM=m$，$AN=n$，根据题设有$S_{\triangle AMN}=\dfrac{1}{2}S_{\triangle ABC}$，

所以$\dfrac{1}{2}mn\sin A=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}bc\sin A$，可得$mn=\dfrac{25}{2}$，　……………………………………………7 分

所以$MN^2=m^2+n^2-2mn\cos A\geq 2mn-\dfrac{14}{25}mn=18$，

当且仅当$m=n=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$时等号成立.

所以$MN$的最小值为$3\sqrt{2}$．……………………………………………………………12 分

18.解：(1)根据分层抽样方法，

第二组抽取人数为$\dfrac{200}{200+300}\times 5=2$，第三组抽取人数为$5-2=3$，

假设第二组 2 人为$A_1$，$A_2$；第三组 3 人为$B_1$，$B_2$，$B_3$，

从 5 人中抽取 2 人有$A_1$和$A_2$，$A_1$和$B_1$，$A_1$和$B_2$，$A_1$和$B_3$，$A_2$和$B_1$，$A_2$和$B_2$，$A_2$和$B_3$，$B_1$和$B_2$，$B_1$和$B_3$，$B_2$和$B_3$，

共 10 种选择，恰有一人来自第二组有 6 种，

故恰有一人来自第二组的概率为$P=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$；……………………………………………6 分

(2)根据分层抽样方法，

潜伏期不超过 6 天的抽取人数为$\dfrac{100+200+300}{1000}\times 200=120$，

潜伏期超过 6 天的抽取人数为$200-120=80$，

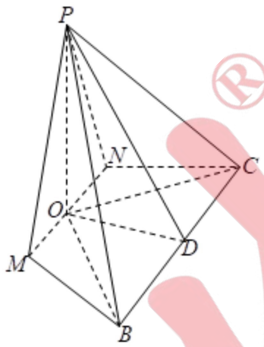
根据题意补充完整的列联表如下：

| | 潜伏期≤6 天 | 潜伏期>6 天 | 总计 |
|---|---|---|---|
| 50 岁以上（含 50 岁） | 65 | 35 | 100 |
| 50 岁以下 | 55 | 45 | 100 |
| 总计 | 120 | 80 | 200 |

则$K^2=\dfrac{200\times(65\times 45-55\times 35)^2}{120\times 80\times 100\times 100}=\dfrac{25}{12}\approx 2.083<3.841$，…………………………10 分

所以没有 95%的把握认为潜伏期与患者年龄有关；………………………………………12 分

19. (1)证明：因为$\triangle ABC$是边长为6的等边三角形，且$MN//BC$，
在$\triangle PMN$中，可得$PM=PN$，
又因为点$O$是线段$MN$的中点，所以$PO\perp MN$，
因为平面$PMN\perp$平面$MNCB$，且$PO\subset$平面$PMN$，平面$PMN\cap$平面$MNCB=MN$，
所以$PO\perp$平面$MNCB$，
又因为$BM\subset$平面$MNCB$，所以$PO\perp BM$.……………………………………5分
(2)解：由$\triangle ABC$是边长为6的等边三角形，可得$\triangle ABC$的高为$3\sqrt{3}$，
因为$MN//BC$，$MN=4$，可得$PO=2\sqrt{3}$，$OD=\sqrt{3}$，
则$\triangle OBC$的面积为$S_{\triangle OBC}=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot OD=\frac{1}{2}\times 6\times\sqrt{3}=3\sqrt{3}$，
又由$PO\perp$平面$MNCB$，且$PO=2\sqrt{3}$，
所以三棱锥$P-OBC$的体积为$V=\frac{1}{3}S_{\triangle OBC}\times PO=\frac{1}{3}\times 3\sqrt{3}\times 2\sqrt{3}=6$，
在直角$\triangle POD$中，$PO=2\sqrt{3},OD=\sqrt{3}$，可得$PD=\sqrt{PO^2+OD^2}=\sqrt{15}$，
所以$\triangle PBC$的面积为$S_{\triangle PBC}=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot PD=\frac{1}{2}\times 6\times\sqrt{15}=3\sqrt{15}$，
设点$O$到平面$PBC$的距离为$d$，
因为$V_{O-PBC}=V_{P-OBC}$，可得$\frac{1}{3}\times S_{\triangle PBC}\cdot d=\frac{1}{3}\times 3\sqrt{15}\times d=6$，解得$d=\frac{2\sqrt{15}}{5}$，
又由$MN//BC$，且$MN\not\subset$平面$PBC$，$BC\subset$平面$PBC$，所以$MN//$平面$PBC$，
则点$M$到平面$PBC$的距离与点$O$到平面$PBC$的距离相等，
所以点$M$到平面$PBC$的距离为$\frac{2\sqrt{15}}{5}$.……………………………………12分




20. 解：（1）由椭圆的对称性知，$A(2,\sqrt{3})$，$C(-2,\sqrt{3})$必在椭圆上，则$B(\frac{3}{2},-\sqrt{3})$不在椭圆上，有$D(3,\frac{\sqrt{7}}{2})$在椭圆上，因此$\begin{cases}\frac{4}{a^2}+\frac{3}{b^2}=1\\ \frac{9}{a^2}+\frac{7}{4b^2}=1\end{cases}$，解得$a=4,b=2$，
所以椭圆$C$的方程为$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$.……………………………………5分
（2）当直线$l$的斜率不存在时，设$l:x=m(-4<m<4)$，则点
$A(m,\frac{1}{2}\sqrt{16-m^2}),B(m,-\frac{1}{2}\sqrt{16-m^2})$，
因$\angle AOB=90^\circ$，则$|m|=\frac{1}{2}\sqrt{16-m^2}$，解得$|m|=\frac{4\sqrt{5}}{5}$，
即原点$O$到直线$l$的距离为$\frac{4\sqrt{5}}{5}$……………………………………8分
当直线$l$的斜率存在时，设直线$l:y=kx+t$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

由$\begin{cases}y=kx+t\\x^2+4y^2=16\end{cases}$消去$y$并整理得：$(1+4k^2)x^2+8ktx+4t^2-16=0$，

有$\Delta=64k^2t^2-4(1+4k^2)(4t^2-16)>0\Leftrightarrow 16k^2+4>t^2$，$x_1+x_2=\dfrac{-8kt}{1+4k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{4t^2-16}{1+4k^2}$，

因$\angle AOB=90°$，则$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+(kx_1+t)(kx_2+t)=(1+k^2)x_1x_2+kt(x_1+x_2)+t^2$

$=\dfrac{(1+k^2)(4t^2-16)}{1+4k^2}-\dfrac{8k^2t^2}{1+4k^2}+t^2=\dfrac{5t^2-16-16k^2}{1+4k^2}=0$，整理得$t^2=\dfrac{16}{5}(1+k^2)$，满足$\Delta>0$，

原点$O$到直线$l$的距离$d=\dfrac{|t|}{\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{\dfrac{t^2}{1+k^2}}=\sqrt{\dfrac{16}{5}}=\dfrac{4\sqrt5}{5}$，

综上得：原点$O$到直线$l$的距离恒为$\dfrac{4\sqrt5}{5}$，即直线$l$与圆$x^2+y^2=\dfrac{16}{5}$相切，

所以直线$l$与定圆$O:x^2+y^2=r^2(r>0)$相切，$r=\dfrac{4\sqrt5}{5}$.……………………………………12 分

21．解：（1）由已知$u'(x)=\dfrac{1}{x}-a$,

当$a\le 0$时，$f'(x)\ge 0$在$(0,+\infty)$恒成立，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增；……………………2 分

当$a>0$时，由$f'(x)=\dfrac{1}{x}-a=0$得$x=\dfrac{1}{a}$，

若$0<x<\dfrac{1}{a}$时，$f'(x)>0$, $f(x)$在$\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$上单调递增，

若$x>\dfrac{1}{a}$时，$f'(x)<0$, $f(x)$在$\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$上单调递减；

综上，当$a\le 0$时，$f(x)$的单调递增区间为$(0,+\infty)$，无单调递减区间；

当$a>0$时，$f(x)$的单调递增区间为$(0,\dfrac{1}{a})$，单调递减区间为$(\dfrac{1}{a},+\infty)$；……………5 分

（2）由题：$f(x)=\ln x-ax+1(a\in\mathbf{R})$

因$x_1,x_2$是函数$f(x)$的两个零点，则$\begin{cases}\ln x_1-ax_1+1=0\\\ln x_2-ax_2+1=0\end{cases}$，即$\begin{cases}\ln x_1=ax_1-1\\\ln x_2=ax_2-1\end{cases}$，$a=\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}$，

要证$2\ln x_1+3\ln x_2>8\ln 2-5$，

只需证明$a(2x_1+3x_2)-5>8\ln 2-5$，即证$a(2x_1+3x_2)>8\ln 2$，

只需证$\dfrac{(2x_1+3x_2)(\ln x_1-\ln x_2)}{x_1-x_2}>8\ln 2$，即证$\dfrac{(\frac{2x_1}{x_2}+3)\cdot\ln\frac{x_1}{x_2}}{\frac{x_1}{x_2}-1}>8\ln 2$，……………………7 分

令$\dfrac{x_1}{x_2}=t$，而$\dfrac{x_2}{2}-x_1>0$，则$t\in(0,\dfrac{1}{2})$，只需证明$\dfrac{(2t+3)\ln t}{t-1}>8\ln 2$，……………………8 分

令函数$g(t)=\dfrac{(2t+3)\ln t}{t-1}$，$t\in(0,\dfrac{1}{2})$，求导得：$g'(t)=\dfrac{-5\ln t+2t-\frac{3}{t}+1}{(t-1)^2}$

令函数$h(t)=-5\ln t+2t-\dfrac{3}{t}+1$，$t\in(0,\dfrac{1}{2})$，求导得$h'(t)=\dfrac{2t^2-5t+3}{t^2}=\dfrac{(t-1)(2t-3)}{t^2}>0$，

则函数$h(t)$在$(0,\dfrac{1}{2})$上单调递增，于是有$h(t)<h(\dfrac{1}{2})=5\ln 2-4<0$，

因此$g'(t)<0$，函数$g(t)$在$(0,\dfrac{1}{2})$上单调递减，则$g(t)>g(\dfrac{1}{2})=\dfrac{4\ln\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}}=8\ln 2$，即

$\dfrac{(2t+3)\ln t}{t-1}>8\ln 2$ 成立，

所以原不等式得证. ……………………………………………………………………12 分

22. 解：（1）曲线 $C$ 的平面直角坐标系方程为 $(x-1)^2+y^2=4$，

故曲线 $C$ 的极坐标方程为 $\rho^2-2\rho\cos\theta-3=0$． ………………………………………4 分

（2）设直线 $l$ 的倾斜角为 $\alpha$，则 $E(\rho_1,\alpha),F(\rho_2,\alpha)$，

∵ $\rho^2-2\rho\cos\alpha-3=0$，由韦达定理可知 $\rho_1\rho_2=-3$.

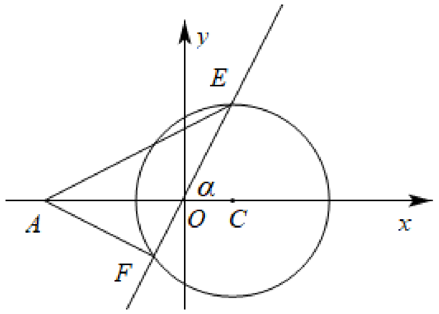
由余弦定理可知 $|AE|=\sqrt{OA^2+OE^2-2OA\cdot OE\cdot\cos\angle AOE}=\sqrt{9+\rho_1^2-6\cdot\rho_1\cdot\cos(\pi-\alpha)}$

$=\sqrt{\rho_1^2+3(2\rho_1\cos\alpha+3)}=\sqrt{\rho_1^2+3\rho_1^2}=2|\rho_1|$．

$|AF|=\sqrt{OA^2+OF^2-2OA\cdot OF\cdot\cos\angle AOF}=\sqrt{9+\rho_2^2+6\cdot\rho_2\cdot\cos\alpha}$

$=\sqrt{\rho_2^2+3(2\rho_2\cos\alpha+3)}=\sqrt{\rho_2^2+3\rho_2^2}=2|\rho_2|$

∴ $|AE||AF|=4|\rho_1\rho_2|=12$． ………………………………………………………………10 分




23.解：（1）因为 $|x-1|-|x-2|\le|x-1-x+2|=1$，所以 $a+b+c\ge1$，

因为 $a^2+b^2\ge2ab$，$b^2+c^2\ge2bc$，$c^2+a^2\ge2ac$，

所以 $2a^2+2b^2+2c^2\ge2ab+2bc+2ac$，

所以 $3a^2+3b^2+3c^2\ge a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac=(a+b+c)^2\ge1$，

故 $a^2+b^2+c^2\ge\dfrac{1}{3}$. ……………………………………………………………………5 分

（2）因为 $a^2+b^2\ge2ab$，所以 $2\left(a^2+b^2\right)\ge a^2+b^2+2ab=(a+b)^2$，

即 $a^2+b^2\ge\dfrac{(a+b)^2}{2}$，两边开平方得 $\sqrt{a^2+b^2}\ge\dfrac{\sqrt2}{2}|a+b|=\dfrac{\sqrt2}{2}(a+b)$，

同理可得 $\sqrt{c^2+b^2}\ge\dfrac{\sqrt2}{2}(c+b)$，$\sqrt{c^2+a^2}\ge\dfrac{\sqrt2}{2}(c+a)$，

三式相加，得 $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\ge\sqrt2(a+b+c)\ge\sqrt2$ ……………………10 分