绵阳市高中2019级第三次诊断性考试
理科数学参考答案及评分意见

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分.

DBCAD　　ABBAB　　DC

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分.

13．2　　4．-10　　15．91　　16．$\dfrac{19}{2}$

三、解答题：本大题共6小题，共70分.

17．解：（1）$\because b\cdot\cos A=2a\cdot\cos B$，

由正弦定理得 $\sin B\cdot\cos A=2\sin A\cdot\cos B$，

即 $\tan B=2\tan A$. ……………………………………………………2分

$\because \tan C=-3$，$A+B+C=\pi$，

$\therefore \tan C=\tan[\pi-(A+B)]=-\tan(A+B)=-\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\cdot\tan B}=\dfrac{3\tan B}{\tan^2 B-2}=-3$，

解得 $\tan B=1$ 或 -2.

$\because \tan C=-3$，

$\therefore C$ 为钝角，B 为锐角，

$\therefore \tan B=1$，即 $B=\dfrac{\pi}{4}$. ……………………………………………………6

分

（2）$\because \tan C=-3$，

$\therefore \sin C=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，$\cos C=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$. ……………………………………8分

$\because A+B+C=\pi$，$\therefore A=\pi-(B+C)$，

$\therefore \sin A=\sin[\pi-(B+C)]=\sin(B+C)=\sin B\cdot\cos C+\cos B\cdot\sin C$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times(-\dfrac{\sqrt{10}}{10})+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{3\sqrt{10}}{10}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. ………10分

由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，得 $a=\dfrac{c\cdot\sin A}{\sin C}$.

$\because c=3$，

$\therefore a=3\times\dfrac{\sqrt{5}}{5}\times\dfrac{10}{3\sqrt{10}}=\sqrt{2}$.

∴△ABC 的面积 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times 3\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3}{2}$．……………………………12 分

18．**解**：（1）∵ $\overline{x}=\frac{1+2+3+4+5+6}{6}=3.50$，∴ $\sum_{i=1}^{6}(x_i-\overline{x})^2=17.5$，

∴ $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{6}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{6}(x_i-\overline{x})^2}=\frac{841}{17.5}\approx 48$．…………………………………………………3 分

又 $\overline{y}=144$，∴ $\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=144-48\times 3.5=-24$．

∴y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=48x-24$．…………………………………………5 分

（2）若利用线性回归模型，可得 2022 年我国新能源乘用车的年销售量的预测值为 $\hat{y}=48\times 7-24=312$（万辆）．…………………………………………………………7 分

若利用模型 $\hat{y}=37.71\mathrm{e}^{0.33x}$，则 $\ln y=3.63+0.33x$，

即 $\hat{y}=\mathrm{e}^{3.63+0.33x}$．

∴2022 年我国新能源乘用车的年销售量的

预测值为 $\hat{y}=\mathrm{e}^{3.63+0.33\times 7}=\mathrm{e}^{5.94}=380$（万辆）．…………………………………………9 分

（3）∵0.71<0.87，且 R^2 越大，反映残差平方和越小，模型的拟合效果越好，

∴用模型 $\hat{y}=37.71\mathrm{e}^{0.33x}$ 得到的预测值更可靠．……………………………………12 分

19．**解**：（1）证明：设点 M 为 BC 的中点，连接 PM，MA．

∴ $PM\perp BC$，且 PM=1．

在△ABM 中，可得 $MA=\sqrt{3}$，且 $MA\perp BC$，

又 MC //AD，且 $MC=AD=1$，

∴四边形 $AMCD$ 为矩形，

∴ AM //CD．……………………………………………………………………………2 分

在△PAM 中，可得 $PA^2=AM^2+PM^2$，

∴ $PM\perp MA$，即 $PM\perp CD$．

又 $BC\perp CD$，$PM\cap BC=M$，直线 PM，BC 均在平面 PBC 内，

$\therefore CD\perp$ 平面PBC． ……………………………………………………………4 分

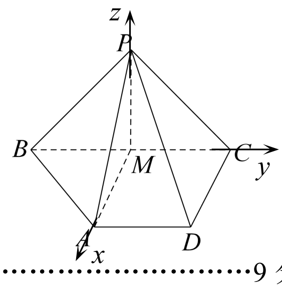
又 $PB\subseteq$ 平面 PBC，

$\therefore PB\perp CD$，

又 $PB\perp PC$， $PC\cap CD=C$，

$\therefore PB\perp$ 平面PCD． ……………………………………………………………6 分

（2）以 M 为坐标原点，分别以 MA，MC，MP 为 x 轴，y 轴，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系 $M\text{-}xyz$．



由题意得 $M(0，0，0)$，$A(\sqrt{3}，0，0)$，

$P(0，0，1)$，$B(0，-1，0)$，$D(\sqrt{3}，1，0)$，

$\therefore \overrightarrow{PA}=(\sqrt{3}，0，-1)$，$\overrightarrow{PB}=(0，-1，-1)$，

设平面 PAB 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x，y，z)$．

$\begin{cases}\sqrt{3}x-z=0,\\ -y-z=0,\end{cases}$ 不妨设 $x=\sqrt{3}$，则 $\boldsymbol{n}_1=(\sqrt{3}，-3，3)$． ……………………9 分

同理可得平面 PAD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(\sqrt{3}，0，3)$．

$\therefore \cos<\boldsymbol{n}_1，\boldsymbol{n}_2>=\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{12}{\sqrt{21}\cdot\sqrt{12}}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$． ……………………………11 分

由图可知，所求二面角的平面角为钝角，

$\therefore$二面角 $B\text{-}PA\text{-}D$ 的平面角的余弦值为$-\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$． ………………………………12 分

20．**解：**（1）$\because e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$， $a^2=b^2+c^2$，$\therefore a^2=2b^2$． ……………………………………2 分

$\therefore |AB|=\dfrac{2a^2}{b^2}=4$，由题意得点 A 的坐标为$(\sqrt{2},\sqrt{2})$．

代入椭圆方程得$\dfrac{2}{a^2}+\dfrac{2}{b^2}=1$．

联立解得$b^2=3$， $a^2=6$．

$\therefore$椭圆 E 的方程为$\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$． ………………………………………………………5 分

（2）联立$\begin{cases}y=x+m,\\ \dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1,\end{cases}$消 y 整理得$3x^2+4mx+2m^2-6=0$．

由$\Delta=16m^2-12(2m^2-6)>0$，解得$-3<m<3$．

由韦达定理得 $x_1+x_2=-\frac{4m}{3}$，①　　$x_1\cdot x_2=\frac{2m^2-6}{3}$．② ……………………7 分

若存在点 P，使得 $|AP|=|AB|$，$AP\perp AB$，则 $P(\frac{14}{3},\ y_2)$．

且直线 AP 的斜率为 $k=\frac{y_2-y_1}{\frac{14}{3}-x_1}=\frac{x_2-x_1}{\frac{14}{3}-x_1}=-1$，即 $x_2=2x_1-\frac{14}{3}$．③ ……………9 分

联立①②③得 $11m^2+28m+17=0$，解得 $m=-1$ 或 $-\frac{17}{11}$．

∴存在点 P 满足题意，此时 $m=-1$ 或 $-\frac{17}{11}$．……………………………………12 分

21．**解**：（1）$f'(x)=\ln x-a$．

令 $f'(x)>0$，解得 $x>e^a$，$f'(x)<0$，解得 $0<x<e^a$．

∴函数 $f(x)$ 在区间 $(0,\ e^a)$ 上单调递减，在区间 $(e^a,+\infty)$ 上单调递增．　…………3 分

当 $x\to 0$ 时，$f(x)\to 1$；当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)=x[\ln x-(a+1)]+1\to+\infty$．

∴要使得 $f(x)$ 有 2 个零点，则 $f(e^a)=1-e^a<0$，

解得 $a>0$．………………………………………………………………………………5 分

（2）$f'(x)=\ln x-a$，$x\in[1,\ e]$，$\ln x\in[0,1]$．

i)当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)\geqslant 0$ 恒成立，函数 $f(x)$ 在区间 $[1,\ e]$ 上单调递增，

∴$m=f(e)=1-ae$，$n=f(1)=-a$．∴$m-n=(1-e)a+1$．

令 $p(a)=(1-e)a+1$，则函数 $p(a)$ 在区间 $(-\infty,0]$ 上单调递减，

∴函数 $p(a)$ 最小值为 $h(0)=1$．……………………………………………………………7 分

ii) 当 $a\geqslant 1$ 时，$f'(x)\leqslant 0$ 恒成立，函数 $f(x)$ 在区间 $[1,\ e]$ 上单调递减．

∴$m=f(1)=-a$，$n=f(e)=1-ae$，∴$m-n=(e-1)a-1$．

令 $h(a)=(e-1)a-1$，则函数 $h(a)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上单调递增，

∴函数 $h(a)$ 最小值为 $h(1)=e-2$．………………………………………………………9 分

iii) 当 $0<a<1$ 时，由 $f'(x)>0$，解得 $e^a<x\leqslant e$，由 $f'(x)<0$，解得 $1\leqslant x<e^a$．

∴函数 $f(x)$ 在区间 $[1,\ e^a)$ 上单调递减，在区间 $(e^a,\ e]$ 上单调递增．

∴$n=f(e^a)=1-e^a$.

①当 $\frac{1}{e-1}\leqslant a<1$ 时，$f(1)-f(e)=(e-1)a-1\geqslant 0$，此时 $m=f(1)=-a$．

∴$m-n=f(1)-f(e^a)=e^a-a-1$．

令 $q(a)=e^a-a-1$，则 $q'(a)=e^a-1>0$．

∴函数 $q(a)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

∴函数 $q(a)$ 的最小值为 $q(\frac{1}{e-1})<q(1)=e-2$，

$\therefore q(\frac{1}{e-1})=e^{\frac{1}{e-1}}-\frac{1}{e-1}-1=e^{\frac{1}{e-1}}-\frac{e}{e-1}$. ……………………………………………………11 分

②当 $0<a<\frac{1}{e-1}$ 时，由 $f(1)-f(e)=(e-1)a-1<0$，$\therefore m=f(e)=1-ae$.

$\therefore m-n=f(e)-f(e^a)=e^a-ae$.

令 $\varphi(a)=e^a-ae$，则 $\varphi'(a)=e^a-e<0$.

$\therefore$ 函数 $\varphi(a)$ 在区间(0，1)上单调递减，

$\therefore \varphi(a)>\varphi(\frac{1}{e-1})=e^{\frac{1}{e-1}}-\frac{e}{e-1}$.

综上，$m-n$ 的最小值为 $e^{\frac{1}{e-1}}-\frac{e}{e-1}$. ……………………………………………………12 分

22．**解**：（1）将直线 l 的参数方程消参，得直线 l 的普通方程为 $x+y=\frac{4}{3}$.

$\because \rho^2=x^2+y^2$，$\rho\cos\theta=x$，$\rho\sin\theta=y$，

又 $x^2+y^2=|x|+|y|$，$\therefore \rho^2=|\rho\cos\theta|+|\rho\sin\theta|$，

$\therefore$ 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=|\cos\theta|+|\sin\theta|$. ……………………………………………5 分

（2）联立 $\begin{cases}\theta=\alpha，\alpha\in[0,\frac{\pi}{2}]\\ \rho=|\cos\theta|+|\sin\theta|，\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\theta=\alpha，\\ \rho=\cos\alpha+\sin\alpha.\end{cases}$

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(\cos\alpha+\sin\alpha，\alpha)$. ……………………………………………………7 分

由题意得直线 l 的极坐标方程为 $\rho\cos\theta+\rho\sin\theta=\frac{4}{3}$.

联立 $\begin{cases}\theta=\alpha，\\ \rho\cos\theta+\rho\sin\theta=\frac{4}{3}，\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\theta=\alpha，\\ \rho=\frac{4}{3(\cos\theta+\sin\theta)}.\end{cases}$

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(\frac{4}{3(\cos\alpha+\sin\alpha)}，\alpha)$. ……………………………………………8 分

$\therefore \frac{|OA|}{|OB|}=\frac{4}{3(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)}=\frac{4}{3(1+\sin2\alpha)}$.

$\because 0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$，$\therefore 0\leqslant2\alpha\leqslant\pi$，$\therefore 0\leqslant\sin2\alpha\leqslant1$，

$\therefore \frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{1+\sin2\alpha}\leqslant1$，$\therefore \frac{2}{3}\leqslant\frac{4}{3(1+\sin2\alpha)}\leqslant\frac{4}{3}$.

$\therefore \frac{2}{3}\leqslant\frac{|OA|}{|OB|}\leqslant\frac{4}{3}$，即 $\frac{|OA|}{|OB|}$ 的取值范围是 $[\frac{2}{3},\frac{4}{3}]$. ……………………………10 分

23．**解**：①当 $x\leqslant1$ 时，不等式等价于 $3-2x\geqslant x+1$，解得 $x\leqslant\frac{2}{3}$，综合，$x\leqslant\frac{2}{3}$；

当 $1<x<2$ 时，不等式等价于 $1\geqslant x+1$，解得 $x\leqslant 0$，综合，无解；

当 $x\geqslant 2$ 时，不等式等价于 $2x-3\geqslant x+1$，解得 $x\geqslant 4$，综合，$x\geqslant 4$；

综上，不等式的解集为 $\{x\,|\,x\leqslant\dfrac{2}{3}\text{或}x\geqslant 4\}$．……………………………………………5 分

（2）证明：不等式等价于 $\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\dfrac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}$，

要证 $\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\dfrac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}$，只要证 $\dfrac{1+|a+b|}{|a+b|}\geqslant\dfrac{1+|a|+|b|}{|a|+|b|}$，

只要证 $\dfrac{1}{|a+b|}\geqslant\dfrac{1}{|a|+|b|}$，只要证 $|a+b|\leqslant|a|+|b|$，

上式显然成立，所以原不等式成立．……………………………………………………10 分