

绵阳市高中 2019 级第三次诊断性考试

文科数学参考答案及评分意见

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.

BDCCD ABBAC DC

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 2 14. -10 15. 93 16. 3

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分.

17. 解：(1) $\because b \cdot \cos A = 2a \cdot \cos B$,

由正弦定理得 $\sin B \cdot \cos A = 2 \sin A \cdot \cos B$,

即 $\tan B = 2 \tan A$2 分

$\because \tan C = -3, A+B+C=\pi$,

$$\therefore \tan C = \tan[\pi - (A+B)] = -\tan(A+B) = -\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B} = \frac{3 \tan B}{\tan^2 B - 2} = -3,$$

解得 $\tan B = 1$ 或 -2 .

$\because \tan C = -3$,

$\therefore C$ 为钝角, B 为锐角,

$$\therefore \tan B = 1, \text{ 即 } B = \frac{\pi}{4}. \text{6 分}$$

分

(2) $\because \tan C = -3$,

$$\therefore \sin C = \frac{3\sqrt{10}}{10}, \cos C = -\frac{\sqrt{10}}{10}. \text{8 分}$$

$\because A+B+C=\pi, \therefore A=\pi-(B+C)$,

$$\begin{aligned} \therefore \sin A &= \sin[\pi - (B+C)] = \sin(B+C) = \sin B \cdot \cos C + \cos B \cdot \sin C \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{3\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{5}}{5}. \text{10 分} \end{aligned}$$

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$, 得 $a = \frac{c \cdot \sin A}{\sin C}$.

$\because c=3$,

$$\therefore a = 3 \times \frac{\sqrt{5}}{5} \times \frac{10}{3\sqrt{10}} = \sqrt{2}.$$

$\therefore \triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2}$12 分

18. 解: (1) $\therefore \bar{x} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3.50$, $\therefore \sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})^2 = 17.5$,

$\therefore \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})^2} = \frac{841}{17.5} \approx 48$3 分

又 $\bar{y} = 144$, $\therefore \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 144 - 48 \times 3.5 = -24$,

$\therefore y$ 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y} = 48x - 24$5 分

分

(2) 若利用线性回归模型, 可得 2022 年我国新能源乘用车的年销售量的预测值为 $\hat{y} = 48 \times 7 - 24 = 312$ (万辆).7 分

分

若利用模型 $\hat{y} = e^{3.63+0.33x}$, 可得 2022 年我国新能源乘用车的年销售量的预测值为 $\hat{y} = e^{3.63+0.33 \times 7} = e^{5.94} = 380$ (万辆).9 分

分

(3) $\because 0.71 < 0.87$, 且 R^2 越大, 反映残差平方和越小, 模型的拟合效果越好,

\therefore 用模型 $\hat{y} = 37.71e^{0.33x}$ 得到的预测值更可靠.12 分

19. 解: (1) 证明: 设点 M 为 BC 的中点, 连接 PM, MA .

由题意得 $PM \perp BC$, 且 $PM=1$.

\therefore 在 $\triangle ABM$ 中, 可得 $MA = \sqrt{3}$, 且 $MA \perp BC$.

又 $MC \parallel AD$, 且 $MC = AD = 1$, 则四边形 $AMCD$ 为矩形,

$\therefore AM \parallel CD$3 分

在 $\triangle PAM$ 中, 可得 $PA^2 = AM^2 + PM^2$,

$\therefore PM \perp MA$, 即 $PM \perp CD$.

又 $BC \perp CD$, $PM \cap BC = M$, 直线 PM, BC 均在平面 PBC 内,

$\therefore CD \perp$ 平面 PBC6 分

(2) 由 (1) 知 $CD \perp$ 平面 PBC , 而直线 CD 在平面 $ABCD$ 内,

\therefore 平面 $ABCD \perp$ 平面 PBC8 分

设点 Q 到平面 PBC 的距离为 h_Q .

$$\therefore V_{B-PQC} = V_{Q-PBC} = \frac{1}{3} S_{\Delta PBC} \cdot h_Q = \frac{\sqrt{3}}{6},$$

$$\therefore \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \cdot h_Q = \frac{\sqrt{3}}{6}. \quad \therefore \text{解得 } h_Q = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \dots\dots\dots 10$$

分

\therefore 点 Q 为线段 AB 的中点,

在 $\triangle QBC$ 中, $BC=2$, $\angle QBC=60^\circ$, $QB=1$,

易得: $\angle BCQ=30^\circ$. $\dots\dots\dots 12$ 分

20. 解: (1) $f'(x) = \ln x - a$.

令 $f'(x) > 0$, 解得 $x > e^a$, $f'(x) < 0$, 解得 $0 < x < e^a$.

\therefore 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, e^a)$ 上单调递减, 在区间 $(e^a, +\infty)$ 上单调递增. $\dots\dots\dots 3$ 分

当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \rightarrow 1$; 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) = x[\ln x - (a+1)] + 1 \rightarrow +\infty$.

\therefore 要使得 $f(x)$ 有 2 个零点, 则 $f(e^a) = 1 - e^a < 0$,

解得 $a > 0$. $\dots\dots\dots 6$ 分

(2) 由题意得 $f'(x) = \ln x - a$, $x \in [1, e]$, $\ln x \in [0, 1]$.

① 当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) \geq 0$ 恒成立, 函数 $f(x)$ 在区间 $[1, e]$ 上单调递增.

\therefore 最大值 $f(e) = 1 - ae = -2$, 最小值 $f(1) = -a = 1 - 2e$, 无解. $\dots\dots\dots 8$

分

② 当 $a \geq 1$ 时, $f'(x) \leq 0$ 恒成立, 函数 $f(x)$ 在区间 $[1, e]$ 上单调递减.

\therefore 最大值 $f(1) = -a = -2$, 最小值 $f(e) = 1 - ae = 1 - 2e$, 解得 $a = 2$, 满足 $a \geq 1$. $\dots\dots\dots 10$

分

③ 当 $0 < a < 1$ 时, 由 $f'(x) > 0$, 解得 $e^a < x \leq e$, $f'(x) < 0$, 解得 $1 \leq x < e^a$.

\therefore 函数 $f(x)$ 在区间 $[1, e^a)$ 上单调递减, 在区间 $(e^a, e]$ 上单调递增.

\therefore 最小值 $f(e^a) = 1 - e^a = 1 - 2e$, 解得 $a = 1 + \ln 2 > 1$, 不满足题意.

综上, $a = 2$. $\dots\dots\dots 12$

分

21. 解: (1) $\therefore e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $a^2 = b^2 + c^2$, $\therefore a^2 = 2b^2$. $\dots\dots\dots 2$ 分

$$\therefore |AB| = \frac{2a^2}{b^2} = 4, \text{ 由题意可得 } A \text{ 点坐标为 } (\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

则代入椭圆方程得 $\frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2} = 1$.

联立解得 $b^2 = 3$, $a^2 = 6$. \therefore 椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$. $\dots\dots\dots 5$ 分

$$(2) \text{ 联立 } \begin{cases} y = x + m, \\ \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases} \text{ 消 } y \text{ 整理得 } 3x^2 + 4mx + 2m^2 - 6 = 0.$$

由 $\Delta = 16m^2 - 12(2m^2 - 6) > 0$, 解得 $-3 < m < 3$.

由韦达定理得 $x_1 + x_2 = -\frac{4m}{3}$, ① $x_1 \cdot x_2 = \frac{2m^2 - 6}{3}$. ②7分

若存在点 P , 使得 $|AP| = |AB|$, $AP \perp AB$, 则 $P(\frac{14}{3}, y_2)$.

且直线 AP 的斜率为 $k = \frac{y_2 - y_1}{\frac{14}{3} - x_1} = \frac{x_2 - x_1}{\frac{14}{3} - x_1} = -1$, 即 $x_2 = 2x_1 - \frac{14}{3}$. ③9分

分

联立①②③得 $11m^2 + 28m + 17 = 0$, 解得 $m = -1$ 或 $-\frac{17}{11}$.

\therefore 存在点 P 满足题意, 此时 $m = -1$ 或 $-\frac{17}{11}$12分

22. 解: (1) 将直线 l 的参数方程消参, 得直线 l 的普通方程为: $x + y = \frac{4}{3}$.

$\because \rho^2 = x^2 + y^2, \rho \cos \theta = x, \rho \sin \theta = y,$

又 $x^2 + y^2 = |x| + |y|, \therefore \rho^2 = |\rho \cos \theta| + |\rho \sin \theta|,$

\therefore 曲线 C 的极坐标方程为: $\rho = |\cos \theta| + |\sin \theta|$5分

(2) 联立 $\begin{cases} \theta = \alpha, \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \rho = |\cos \theta| + |\sin \theta|, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} \theta = \alpha, \\ \rho = \cos \alpha + \sin \alpha. \end{cases}$

\therefore 点 B 的坐标为 $(\cos \alpha + \sin \alpha, \alpha)$7分

由题意得直线 l 的极坐标方程为 $\rho \cos \theta + \rho \sin \theta = \frac{4}{3}$.

联立 $\begin{cases} \theta = \alpha, \\ \rho \cos \theta + \rho \sin \theta = \frac{4}{3}, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} \theta = \alpha, \\ \rho = \frac{4}{3(\cos \theta + \sin \theta)}. \end{cases}$

\therefore 点 A 的坐标为 $(\frac{4}{3(\cos \alpha + \sin \alpha)}, \alpha)$8分

$\therefore \frac{|OA|}{|OB|} = \frac{4}{3(\cos \alpha + \sin \alpha)(\cos \alpha + \sin \alpha)} = \frac{4}{3(1 + \sin 2\alpha)}$.

$\because 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, \therefore 0 \leq 2\alpha \leq \pi, \therefore 0 \leq \sin 2\alpha \leq 1,$

$\therefore \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1 + \sin 2\alpha} \leq 1, \therefore \frac{2}{3} \leq \frac{4}{3(1 + \sin 2\alpha)} \leq \frac{4}{3}$.

$\therefore \frac{2}{3} \leq \frac{|OA|}{|OB|} \leq \frac{4}{3}$, 即 $\frac{|OA|}{|OB|}$ 的取值范围是 $[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}]$10分

23. 解: ①当 $x \leq 1$ 时, 不等式等价于 $3 - 2x \geq x + 1$, 解得 $x \leq \frac{2}{3}$, 综合, $x \leq \frac{2}{3}$;

当 $1 < x < 2$ 时, 不等式等价于 $1 \geq x + 1$, 解得 $x \leq 0$, 综合, 无解;

当 $x \geq 2$ 时, 不等式等价于 $2x - 3 \geq x + 1$, 解得 $x \geq 4$, 综合, $x \geq 4$;

综上, 不等式的解集为 $\{x | x \leq \frac{2}{3} \text{ 或 } x \geq 4\}$5 分

(2) 证明: 不等式等价于 $\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}$,

要证 $\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}$, 只要证 $\frac{1+|a+b|}{|a+b|} \geq \frac{1+|a|+|b|}{|a|+|b|}$,

只要证 $\frac{1}{|a+b|} \geq \frac{1}{|a|+|b|}$, 只要证 $|a+b| \leq |a|+|b|$,

上式显然成立, 所以原不等式成立.10

分