

绵阳市高中2019级第三次诊断性考试

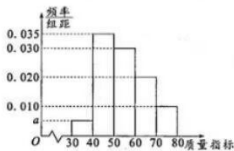
理科数学

注意事项：

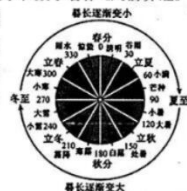
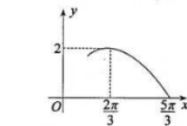
1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将答题卡交回。

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

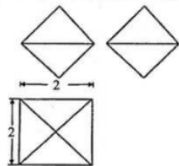
1. 若复数 $z=(2-i)(4-i)$ ，则 z 的共轭复数为
A. $-7-6i$ B. $-7+6i$ C. $7-6i$ D. $7+6i$
2. 已知集合 $A=\{x|x^2 < 1\}$ ， $B=\{x|e^x < 2\}$ ，则 $A \cap B =$
A. $(-1, 1)$ B. $(-1, \ln 2)$ C. $(0, \ln 2)$ D. $(\ln 2, 1)$
3. 某车间从生产的一批产品中随机抽取了1000个零件进行一项质量指标的检测，整理检测结果得此项质量指标的频率分布直方图如图
所示，则下列结论错误的是
A. $a=0.005$
B. 估计这批产品该项质量指标的众数为45
C. 估计这批产品该项质量指标的中位数为60
D. 从这批产品中随机选取1个零件，其质量指标在 $[50, 70)$ 的概率约为0.5
4. 已知 α, β 是两个不同的平面， m 是一条直线，若 $m \perp \beta$ ，则“ $m // \alpha$ ”是“ $\alpha \perp \beta$ ”的
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分又不必要条件
5. 已知函数 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ ，则
A. $f(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增 B. $f(x)$ 的图象关于点 $(-1, 1)$ 对称
C. $f(x)$ 为奇函数 D. $f(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称



6. 已知抛物线 $x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点为 F ，直线 $l: 2\sqrt{3}x - 2y + p = 0$ 与抛物线交于 A, B 两点，且 $|AF| = 3 + |BF|$ ，则 $|AB| =$
A. $2\sqrt{3}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. 4
7. 函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi) (A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示，将函数 $y=f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位得到函数 $y=g(x)$ 的图像，则 $g(\frac{\pi}{3}) =$
A. $\frac{1}{2}$ B. 1
C. $\sqrt{2}$ D. $\sqrt{3}$
8. 在2022年北京冬奥会开幕式上，二十四节气倒计时惊艳亮相，与节气相配的14句古诗词，将中国人独有的浪漫传达给了全世界。我国古代天文学和数学著作《周髀算经》中记载：一年有二十四个节气，每个节气的晷长损益相同（晷是按照日影测定时刻的仪器，晷长即为所测量影子的长度），二十四节气及晷长变化如图所示，相邻两个节气晷长减少或增加的量相同，周而复始。已知雨水的晷长为9.5尺，立冬的晷长为10.5尺，则冬至所对的晷长为
A. 11.5尺 B. 13.5尺
C. 12.5尺 D. 14.5尺



9. 已知曲线 $y=x^3-x^2+x+2$ 在 $x=1$ 处的切线为 l ，若 l 与 $\odot C: x^2+y^2-2ax+a^2-5=0$ 相交，则实数 a 的取值范围是
A. $(-3, 2)$ B. $(-2, 3)$ C. $(-6, 4)$ D. $(0, 2)$
10. 将5名支援某地区抗疫的医生分配到 A, B, C 三所医院，要求每所医院至少安排1人，则其中甲、乙两医生恰分配到相同医院的概率为
A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{6}{25}$ C. $\frac{7}{16}$ D. $\frac{4}{9}$
11. 某几何体的三视图如图所示，其中正视图与侧视图均为正方形。将该几何体完全放置在一个球内，则满足条件的球的最小体积为
A. $\frac{4}{3}\pi$ B. 8π
C. $\frac{32\pi}{3}$ D. $\frac{8\sqrt{2}\pi}{3}$
12. 在给出的① $\sqrt{e} \cdot \ln 2 < 1$ ；② $e^{\frac{3}{2}} \ln 2 > \frac{9}{2}$ ；③ $e^{e^2} > \ln 3$ 。三个不等式中，正确的个数为
A. 0个 B. 1个 C. 2个 D. 3个



二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (其中 $a > 0, b > 0$) 的焦距为 $4\sqrt{5}$ ，其中一条渐近线的斜率为2，则 $a =$ _____。

14. 在等边 $\triangle ABC$ 中， $AB=4$ ， $\overline{BC} = 4\overline{BD}$ ，则 $\overline{AD} \cdot \overline{CA} =$ _____。

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $a_1=1$ ， $a_{n+1}=S_n+5$ ，则 $S_5 =$ _____。

16. 在棱长为3的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，已知点 P 为棱 AA_1 上靠近于点 A_1 的三等分点，点 Q 为棱 CD 上一动点。若 M 为平面 D_1PQ 与平面 ABB_1A_1 的公共点， N 为平面 D_1PQ 与平面 $ABCD$ 的公共点，且点 M, N 都在正方体的表面上，则由所有满足条件的点 M, N 构成的区域的面积之和为 _____。

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17-21题为必考题，每个试题考生都必须作答。第22、23题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必考题：共60分。

17. (12分)

在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边为 a, b, c ，已知 $b \cdot \cos A = 2a \cdot \cos B$ ，且 $\tan C = -3$ 。

(1) 求角 B 的大小；

(2) 若 $c=3$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积 S 。

18. (12分)

随着科技进步，近年来，我国新能源汽车产业迅速发展。以下是中国汽车工业协会2022年2月公布的近六年我国新能源乘用车的年销售量数据：

年份	2016	2017	2018	2019	2020	2021
年份代码 x	1	2	3	4	5	6
新能源乘用车年销量 y (万辆)	50	78	126	121	137	352

(1) 根据表中数据，求出 y 关于 x 的线性回归方程；(结果保留整数)

(2) 若用 $y = me^{ax}$ 模型拟合 y 与 x 的关系，可得回归方程为 $\hat{y} = 37.71e^{0.23x}$ ，经计算该模型和第(1)问中模型的 R^2 (R^2 为相关指数) 分别为0.87和0.71，请分别利用这两个模型，求2022年我国新能源乘用车的年销售量的预测值；

(3) 你认为(2)中用哪个模型得到的预测值更可靠？请说明理由。

参考数据：设 $u = \ln y$ ，其中 $u_i = \ln y_i$ 。

\bar{y}	\bar{u}	$\sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$\sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})(u_i - \bar{u})$	$e^{1.63}$	$e^{1.94}$	$e^{2.27}$
144	4.78	841	5.70	37.71	380	528

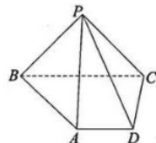
参考公式：对于一组具有线性相关关系的数据 $(x_i, y_i) (i=1, 2, 3, \dots, n)$ ，其回归直线

$$\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$$

的斜率和截距的最小二乘估计公式分别为 $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$ ， $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$ 。

19. (12分)

在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为梯形，已知 $AD \parallel BC$ ， $\angle BAD = 120^\circ$ ， $AB = BC = PA = 2AD = 2$ ， $\triangle PBC$ 是以 BC 为斜边的等腰直角三角形。



(1) 证明： $PB \perp$ 平面 PCD ；

(2) 求二面角 $B-PA-D$ 的平面角的余弦值。

20. (12分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (其中 $a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，直线 $y = x + m$ 与 E 交于

$A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ 两点，且 $x_1 > x_2$ ，当 $m=0$ 时， $|AB| = \frac{2a^2}{b}$ 。

(1) 求椭圆 E 的方程；

(2) 在直线 $x = \frac{14}{3}$ 上是否存在点 P ，使得 $|AP| = |AB|$ ， $AP \perp AB$ ，若存在，求出 m 的值；若不存在，请说明理由。

21. (12分)

函数 $f(x) = x \ln x - (a+1)x + 1$ 。

(1) 若函数 $f(x)$ 有2个零点，求实数 a 的取值范围；

(2) 若函数 $f(x)$ 在区间 $[1, e]$ 上最大值为 m ，最小值为 n ，求 $m-n$ 的最小值。

(二) 选考题：共10分。请考生在第22、23题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题记分。

22. 【选修4-4：坐标系与参数方程】(10分)

在直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数)，曲线 C 的方程

为 $x^2 + y^2 = |x| + |y|$ 。以坐标原点为极点， x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，射线 E 的极坐标方程为 $\theta = \alpha$ ， $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 。

(1) 求直线 l 的普通方程和曲线 C 的极坐标方程；

(2) 若 E 与 l 交于点 A ， E 与 C 交于点 B ，求 $\frac{|OA|}{|OB|}$ 的取值范围。

23. 【选修4-5：不等式选讲】(10分)

已知函数 $f(x) = |x|$ 。

(1) 求关于 x 的不等式 $f(x-1) + f(x-2) \geq x+1$ 的解集；

(2) 求证： $\frac{f(a+b)}{1+f(a+b)} \leq \frac{f(a)+f(b)}{1+f(a)+f(b)}$ 。