

绵阳市高中 2018 级第三次诊断性考试

文科数学参考答案及评分意见

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.

BDCDA BCBCA AD

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 0 14. $2e$ 15. $\sqrt{2}$ 16. $\sqrt{7}$

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分.

17. 解：（1）由图知：高二年级学生的成绩的平均分高于高一年级学生成绩的平均分；高二年级的学生成绩比较集中，而高一年级的学生成绩比较分散.

∴高二年级的学生学习效果更好. ……………4 分

（2）由图知：高一、高二两个年级数学成绩为良好的人数分别为 4，6，若用分层抽样法抽出 5 人，则应从高一、高二两个年级各抽出 2 人、3 人. ……………7 分
设“5 位同学任意选出 2 人发言，这 2 人是来自不同年级的同学”为事件 A.

将高一选出的 2 人记为： a 、 b ，高二选出的 3 人记为：1，2，3.

可得 ab ， $a1$ ， $a2$ ， $a3$ ， $b1$ ， $b2$ ， $b3$ ，12，13，23 共有 10 种选法，

事件 A 包含 $a1$ 、 $a2$ 、 $a3$ 、 $b1$ 、 $b2$ 、 $b3$ 共有 6 种. ……………10 分

$$\therefore P(A) = \frac{3}{5}.$$

∴选出的 2 人是来自不同班的同学的概率等于 $\frac{3}{5}$. ……………12 分

18. 解：（1）在锐角 $\triangle ABC$ 中， $AB=3$ ， $AC=\sqrt{7}$ ， $\angle ABC=60^\circ$ ，

$$\text{由正弦定理得 } \sin \angle ACB = \frac{AB \cdot \sin \angle ABC}{AC} = \frac{3\sqrt{21}}{14},$$

$$\therefore \cos \angle ACB = \frac{\sqrt{7}}{14}. \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\therefore \sin \angle BAC = \sin[\pi - (\frac{\pi}{3} + \angle ACB)] = \sin(\frac{\pi}{3} + \angle ACB),$$

$$\therefore \sin \angle BAC = \sin \angle ACB \cdot \cos \frac{\pi}{3} + \cos \angle ACB \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{21}}{14} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{14} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{21}}{7}. \quad \dots\dots 6 \text{ 分}$$

（2）∵ $AB \parallel CD$ ，∴ $\angle ACD = \angle BAC$ ，

$$\therefore \sin \angle ACD = \sin \angle BAC = \frac{\sqrt{21}}{7}. \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中, $AD = AC \times \sin \angle ACD = \sqrt{7} \times \frac{\sqrt{21}}{7} = \sqrt{3}$,9 分

$\therefore CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = 2$,10 分

$\because S_{\triangle BCD} = S_{\triangle ACD}$,

又 $S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} AD \times CD = \sqrt{3}$,

$\therefore S_{\triangle BCD} = \sqrt{3}$12 分

19. 解: (1) 证明: 取 BC 的中点 G , 连接 GF , GA .

\because 点 F 为 BD 的中点,

$\therefore GF \parallel CD$, 且 $GF = \frac{1}{2} CD$2 分

又 $CD \parallel AE$, $CD = 2AE$,

$\therefore GF \parallel AE$, 且 $GF = AE$,

\therefore 四边形 $AEFG$ 为平行四边形,

$\therefore EF \parallel AG$,

又 $EF \not\subset$ 平面 ABC , $AG \subset$ 平面 ABC ,

$\therefore EF \parallel$ 平面 ABC6 分

(2) $\because EF \perp CD$, $\therefore CD \perp AG$,

又 $AC \perp CD$, $\therefore CD \perp$ 平面 ABC ,

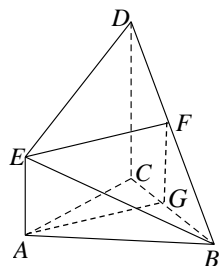
$\therefore CD \perp BC$9 分

又平面 $BCD \perp$ 平面 $ACDE$, 平面 $BCD \cap$ 平面 $ACDE = CD$,

$\therefore BC \perp$ 平面 $ACDE$, $\therefore BC$ 为四棱锥 $B-ACDE$ 的高,

$\because CD = CB = 2AE = 2AC = 2$,

$\therefore V_{B-ACDE} = \frac{1}{3} S_{\text{梯形}ACDE} \cdot BC = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} (AE + CD) \times BC = \frac{1}{6} \times (1 + 2) \times 2 = 1$12 分



20. 解: (1) 由题意得 $\frac{6}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$, $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,2 分

又 $a^2 = b^2 + c^2$,

解得 $a^2 = 8$, $b^2 = 4$.

\therefore 椭圆的方程为 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$5 分

(2) 设直线 MN 的方程为 $x = my + 2$, $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$.

$$\text{联立方程} \begin{cases} x = my + 2, \\ \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1, \end{cases} \quad \text{整理得 } (m^2 + 2)y^2 + 4my - 4 = 0.$$

$$\text{由 } y_1 + y_2 = \frac{-4m}{m^2 + 2}, \quad y_1 y_2 = \frac{-4}{m^2 + 2}, \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

得 $y_1 + y_2 = my_1 y_2$.

$$\text{直线 } DN \text{ 的方程为 } y = \frac{y_2}{x_2 - 3}(x - 3). \quad \text{①}$$

过 M 且与 y 轴垂直的直线的方程为 $y = y_1$. ② $\dots\dots\dots 10$ 分

$$\text{联立①②可得 } x_P = 3 + \frac{y_1(x_2 - 3)}{y_2} = 3 + \frac{y_1(my_2 - 1)}{y_2} = 3 + \frac{y_1 + y_2 - y_1}{y_2} = 4.$$

\therefore 点 P 在定直线 $x = 4$ 上. $\dots\dots\dots 12$ 分

21. 解: (1) 由 $f(x) = e^x - a \ln x$, 得 $f'(x) = e^x - \frac{a}{x} (x > 0)$.

\because 函数 $f(x)$ 在定义域内为增函数,

$$\therefore f'(x) = e^x - \frac{a}{x} = \frac{xe^x - a}{x} \geq 0 \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 恒成立.} \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) \geq 0$, 满足题意;

当 $a > 0$ 时, 设 $h(x) = xe^x - a (x > 0)$.

易得 $h'(x) = (x+1)e^x > 0$, \therefore 函数 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数,

$\therefore h(x) > h(0) = -a \geq 0$, 即 $a \leq 0$ 与 $a > 0$ 矛盾.

综上, 实数 a 的取值范围为 $(-\infty, 0]$. $\dots\dots\dots 6$ 分

(2) 易知 $f'(x) = e^x - \frac{e^2}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

$$\text{又 } f'(1) = e - e^2 < 0, \quad f'(2) = \frac{e^2}{2} > 0,$$

\therefore 存在 $x_0 \in (1, 2)$, 使得 $f'(x_0) = 0$, 即 $e^{x_0} = \frac{e^2}{x_0}$, $\therefore \ln x_0 = 2 - x_0$. $\dots\dots\dots 8$ 分

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$,

\therefore 函数 $f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 单调递增. $\dots\dots\dots 10$ 分

$$\therefore f(x) \geq e^{x_0} - e^2 \ln x_0 = \frac{e^2}{x_0} - e^2(2 - x_0) = e^2 \left(\frac{1}{x_0} + x_0 \right) - 2e^2 > 2e^2 - 2e^2 = 0.$$

$\therefore f(x) > 0$. $\dots\dots\dots 12$ 分

22. 解: (1) 由 $\begin{cases} x = \sqrt{10} \cos \alpha, \\ y = \sqrt{10} \sin \alpha + 4, \end{cases}$ 得 $x^2 + (y-4)^2 = 10$2分

由 $\begin{cases} y = \rho \sin \theta, \\ x = \rho \cos \theta, \end{cases}$ 得曲线 E 的极坐标方程为 $\rho^2 - 8\rho \sin \theta + 6 = 0$4分

直线 l 的极坐标方程为 $\theta = \beta$ ($\rho \in \mathbf{R}$, $0 \leq \beta < \pi$).5分

(2) 将直线 $l: \theta = \beta$ ($\rho \in \mathbf{R}$, $0 \leq \beta < \pi$), 代入曲线 E 的方程得 $\rho^2 - 8\rho \sin \beta + 6 = 0$.

由 $\Delta = 64 \sin^2 \beta - 24 > 0$, 解得 $\sin^2 \beta > \frac{3}{8}$.

设 $N(\rho_2, \beta)$, $M(\rho_1, \beta)$. 由韦达定理得 $\rho_1 + \rho_2 = 8 \sin \beta$, $\rho_1 \rho_2 = 6$7分

$\therefore \overline{ON} = 3\overline{OM}$, $\therefore \rho_2 = 3\rho_1$, 解得 $\sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 满足 $\Delta > 0$.

$\therefore 0 \leq \beta < \pi$, $\therefore \beta = \frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$, $\therefore k = \tan \beta = \pm 1$.

\therefore 直线 l 的斜率为 ± 110分

23. 解: (1) 当 $x \geq 1$ 时, $4x - 3 \geq 4$, 解得 $x \geq \frac{7}{4}$;2分

当 $\frac{1}{2} < x < 1$ 时, $1 \geq 4$ 不成立;

当 $x \leq \frac{1}{2}$ 时, $3 - 4x \geq 4$, 解得 $x \leq -\frac{1}{4}$4分

综上, 不等式 $f(x) \geq 4$ 的解集为 $(-\infty, -\frac{1}{4}] \cup [\frac{7}{4}, +\infty)$5分

(2) 由题意得 $2f(x) - g(x) = 4|x-1| - |x+1|$,

当 $x=0$ 时, $3 \geq 0$, 显然成立.

要使 $2f(x) - g(x) \geq a|x|$ 成立, 即 $a \leq \frac{2f(x) - g(x)}{|x|}$ ($x \neq 0$),

令 $h(x) = \frac{2f(x) - g(x)}{|x|}$ ($x \neq 0$),

即 $h(x) = \frac{4|x-1| - |1+x|}{|x|} = 4 \left| 1 - \frac{1}{x} \right| - \left| \frac{1}{x} + 1 \right|$ 7分

$\geq \left| 1 - \frac{1}{x} \right| - \left| \frac{1}{x} + 1 \right|$ (当且仅当 $x=1$ 时取得等号)

$\geq -\left| 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + 1 \right| = -2$ (当且仅当 $0 < x \leq 1$ 时取得等号).

\therefore 当 $x=1$ 时函数 $h(x)$ 取得最小值 -2 .

$\therefore a \leq -2$.

即实数 a 的取值范围为 $(-\infty, -2]$10分