成都市2018级高中毕业班第二次诊断性检测

数学(文科)参考答案及评分意见

第Ⅰ卷　(选择题,共60分)

一、选择题:(每小题5分,共60分)

1. A;　2. D;　3. C;　4. B;　5. D;　6. A;　7. B;　8. C;　9. C;　10. B;　11. C;　12. B.

第Ⅱ卷　(非选择题,共90分)

二、填空题:(每小题5分,共20分)

13. -1;　　14. $\frac{1}{3}$;　　15. $\frac{1}{2}$;　　16. $b < c < a$.

三、解答题:(共70分)

17. 解:(Ⅰ)由已知及正弦定理,得 $\sqrt{2}\sin B\cos C - \sin A\cos C = \sin C\cos A$.　　……2分

$\therefore \sqrt{2}\sin B\cos C = \sin A\cos C + \cos A\sin C = \sin(A+C)$.　　……3分

$\because A + C = \pi - B$, $\therefore \sin(A+C) = \sin B$.

$\therefore \sqrt{2}\sin B\cos C = \sin B$.　　……4分

又 $\because \sin B \neq 0$, $\therefore \cos C = \frac{\sqrt{2}}{2}$.　　……5分

$\because C \in (0,\pi)$, $\therefore C = \frac{\pi}{4}$.　　……6分

(Ⅱ)由已知及余弦定理,得 $ac \cdot \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} - bc \cdot \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = b^2$.　　……8分

化简,得 $a^2 = 2b^2$.　　……9分

又 $\because a = \sqrt{2}$, $\therefore b = 1$.　　……10分

$\therefore$ $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$.　　……12分

18. 解:(Ⅰ)由题意,知 $\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5+6+7}{7} = 4$,　　……1分

$\bar{y} = \frac{2.90+3.30+3.60+4.40+4.80+5.20+5.90}{7} = 4.30$,　　……2分

$\sum_{i=1}^{7}(x_i - \bar{x})^2 = (1-4)^2 + (2-4)^2 + (3-4)^2 + (4-4)^2 + (5-4)^2 + (6-4)^2 + (7-4)^2 = 28$.　　……3分

$\therefore r = \frac{14.00}{\sqrt{28 \times 7.08}} = \frac{14.00}{\sqrt{198.24}} \approx \frac{14.00}{14.10} \approx 0.99$.　　……5分

因为 y 与 x 的相关系数近似为0.99,所以 y 与 x 的线性相关程度相当大,从而可以用

线性回归模型拟合 y 与 x 的关系． ……6 分

（Ⅱ）$\because \hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})^2}=\dfrac{14}{28}=0.5$， ……8 分

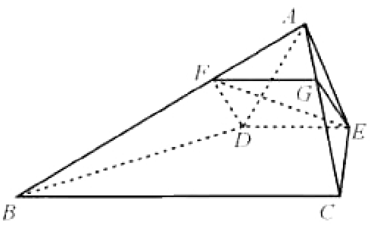
$\therefore \hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=4.3-0.5\times 4=2.3$. ……9 分

$\therefore$ y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=0.5x+2.3$. ……10 分

将 $x=10$ 代入线性回归方程，得 $\hat{y}=0.5\times 10+2.3=7.3$.

$\therefore$估算该种机械设备使用 10 年的失效费为 7.3 万元． ……12 分

19. 解：（Ⅰ）如图，在棱 AC 上取点 G 满足 $CG=2AG$，连接 EG，FG. ……1 分



$\because BF=2AF$，$\therefore FG\parallel BC$ 且 $FG=\dfrac{1}{3}BC$.

又由题意，可得 $DE\parallel BC$ 且 $DE=\dfrac{1}{3}BC$.

$\therefore DE=FG$ 且 $DE\parallel FG$.

$\therefore$ 四边形 $DEGF$ 为平行四边形． ……3 分

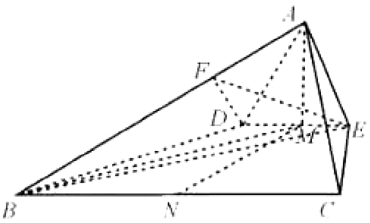
$\therefore DF\parallel EG$.

又 $\because DF\not\subset$ 平面 ACE，$EG\subset$ 平面 ACE，

$\therefore DF\parallel$ 平面 ACE. ……5 分

（Ⅱ）如图，分别取 DE，BC 的中点 M，N，连接 AM，MN，BM，BE.

由题意，知 $MN\perp BC$，$AM=2$，$MN=4$，$BN=3$.



在 $\mathrm{Rt}\triangle BMN$ 中，$BM=\sqrt{BN^2+MN^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

在 $\triangle ABM$ 中，$\because AB=\sqrt{29}$，

$\therefore AM^2+BM^2=2^2+5^2=29=AB^2$.

$\therefore AM\perp BM$. ……7 分

又 $\because AM\perp DE$，$BM\cap DE=M$，$BM,DE\subset$ 平面 $BCED$，

$\therefore AM\perp$ 平面 $BCED$. ……8 分

$\because BF=2AF$，

$\therefore$ 三棱锥 $A-DEF$ 的体积 $V_{A-DEF}=V_{F-ADE}=\dfrac{1}{3}V_{B-ADE}=\dfrac{1}{3}V_{A-BDE}$. ……10 分

又 $\because V_{A-BDE}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle BDE}\cdot AM=\dfrac{1}{6}DE\cdot MN\cdot AM=\dfrac{1}{6}\times 2\times 4\times 2=\dfrac{8}{3}$， ……11 分

$\therefore$ 三棱锥 $A-DEF$ 的体积 $V_{A-DEF}=\dfrac{1}{3}V_{A-BDE}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{8}{3}=\dfrac{8}{9}$. ……12 分

20. 解：（Ⅰ）由已知，得 $a=2$. $\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. ……1 分

$\because$ 椭圆 C 经过点 $A(1,\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，$\therefore \dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4b^2}=1$，解得 $b^2=1$. ……3 分

$\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. ……4 分

（Ⅱ）由题意，知直线 l 的斜率存在且不为 0，设直线 l 的方程为 $x=ty-1(t\neq 0)$，$D(x_1,y_1)$，$E(x_2,y_2)$.

由 $\begin{cases}x=ty-1\\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$，消去 x，得 $(t^2+4)y^2-2ty-3=0$. ……5 分

$\because \Delta=4t^2+12(t^2+4)=16t^2+48>0$，

$\therefore y_1+y_2=\dfrac{2t}{t^2+4}$，$y_1y_2=-\dfrac{3}{t^2+4}$. ……6 分

$\because F$ 为点 E 关于 x 轴的对称点，$\therefore F(x_2,-y_2)$.

$\therefore$ 直线 DF 的方程为 $y-y_1=\dfrac{y_1+y_2}{x_1-x_2}(x-x_1)$，

即 $y-y_1=\dfrac{y_1+y_2}{t(y_1-y_2)}(x-x_1)$. ……7 分

令 $y=0$，则 $x=x_1+\dfrac{-ty_1^2+ty_1y_2}{y_1+y_2}=\dfrac{(ty_1-1)(y_1+y_2)-ty_1^2+ty_1y_2}{y_1+y_2}$

$$=\frac{2ty_1y_2-(y_1+y_2)}{y_1+y_2}=2t\cdot(-\frac{3}{2t})-1=-4.$$

$\therefore G(-4,0)$. ……8 分

$\therefore |S_1-S_2|=\dfrac{1}{2}|BG|\cdot|y_1+y_2|=\dfrac{3}{2}|y_1+y_2|=\dfrac{3|t|}{t^2+4}$

$=\dfrac{3}{|t|+\dfrac{4}{|t|}}\leqslant\dfrac{3}{2\sqrt{|t|\cdot\dfrac{4}{|t|}}}=\dfrac{3}{4}$. ……11 分

$\therefore$ 当且仅当 $|t|=\dfrac{4}{|t|}$，即 $t=\pm 2$ 时，$|S_1-S_2|$ 取得最大值 $\dfrac{3}{4}$. ……12 分

21. 解：（Ⅰ）由已知，可得 $f'(x)=1-\dfrac{a}{x^2}-\dfrac{a-1}{x}=\dfrac{(x+1)(x-a)}{x^2}(x>0)$. ……1 分

①若 $a\leqslant 0$，则当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，与 $f(x)$ 存在极值点矛盾； ……2 分

②若 $a>0$，则由 $f'(x)=0$ 得 $x=a$.

$\therefore$ 当 $x\in(0,a)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(a,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$.

$\therefore f(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递减，在 $(a,+\infty)$ 上单调递增.

$\therefore f(x)$ 存在唯一极小值点 $x=a$. …… 3 分

$\therefore f(a)=a+1-(a-1)\ln a-2=(a-1)(1-\ln a)=0$. ……4 分

$\therefore a=1$ 或 $a=\mathrm{e}$. ……5 分

（Ⅱ）①当 $a\leqslant 1$ 时，$f'(x)\geqslant 0$ 在 $[1,\mathrm{e}]$ 上恒成立，$\therefore f(x)$ 在 $[1,\mathrm{e}]$ 上单调递增.

$\because f(1)=a-1\leqslant 0$，$f(\mathrm{e})=\mathrm{e}+\dfrac{a}{\mathrm{e}}-a-1=(\mathrm{e}-1)(1-\dfrac{a}{\mathrm{e}})>0$，

$\therefore$ 由零点存在性定理，$f(x)$ 在 $[1,\mathrm{e}]$ 上有 1 个零点； ……7 分

②当 $1<a<\mathrm{e}$ 时，

$\because$ 当 $x\in[1,a)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(a,\mathrm{e}]$ 时，$f'(x)>0$，

$\therefore f(x)$ 在 $[1,a)$ 上单调递减，在 $(a,\mathrm{e}]$ 上单调递增.

$\therefore f(x)_{\min}=f(a)=(a-1)(1-\ln a)>0$,此时 $f(x)$ 在 $[1,e]$ 上无零点; ……9 分

③当 $a\geqslant e$ 时,$\because f'(x)\leqslant 0$ 在 $[1,e]$ 上恒成立,$\therefore f(x)$ 在 $[1,e]$ 上单调递减.

$\because f(1)=a-1>0$, $f(e)=(e-1)(1-\dfrac{a}{e})\leqslant 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $[1,e]$ 上有 1 个零点. ……11 分

综上,当 $1<a<e$ 时, $f(x)$ 在 $[1,e]$ 上无零点;

当 $a\leqslant 1$ 或 $a\geqslant e$ 时, $f(x)$ 在 $[1,e]$ 上有 1 个零点. ……12 分

22. 解:(Ⅰ)由曲线 C 的参数方程,得曲线 C 的普通方程为

$(x-1)^2+y^2=\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$. ……1 分

由极坐标与直角坐标的互化公式 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$,得

曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=2\cos\theta$, ……3 分

直线 l 的极坐标方程为 $\rho\cos\theta+\sqrt{3}\rho\sin\theta-6=0$,即 $\rho\sin(\theta+\dfrac{\pi}{6})=3$. ……5 分

(Ⅱ)设点 P 的极坐标为 (ρ_1,θ),点 Q 的极坐标为 (ρ_2,θ),其中 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$.

由(Ⅰ)知 $|OP|=\rho_1=\dfrac{6}{\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}$, $|OQ|=\rho_2=2\cos\theta$. ……7 分

$\therefore \dfrac{|OP|}{|OQ|}=\dfrac{\rho_1}{\rho_2}=\dfrac{6}{2\cos^2\theta+2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{6}{1+\cos 2\theta+\sqrt{3}\sin 2\theta}$

$=\dfrac{6}{1+2\sin(2\theta+\dfrac{\pi}{6})}$. ……9 分

$\because 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$, $\therefore \dfrac{\pi}{6}<2\theta+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{7\pi}{6}$. $\therefore -\dfrac{1}{2}<\sin(2\theta+\dfrac{\pi}{6})\leqslant 1$.

$\therefore$ 当 $\sin(2\theta+\dfrac{\pi}{6})=1$,即 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 时, $\dfrac{|OP|}{|OQ|}$ 取得最小值 2. ……10 分

23. 解:(Ⅰ)当 $x<-1$ 时, $f(x)=-3x-3-2x+1=-5x-2>3$; ……1 分

当 $-1\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时, $f(x)=3x+3-2x+1=x+4\in[3,\dfrac{9}{2}]$; ……2 分

当 $x>\dfrac{1}{2}$ 时, $f(x)=3x+3+2x-1=5x+2>\dfrac{9}{2}$. ……3 分

综上,当 $x=-1$ 时, $f(x)_{\min}=3$, $\therefore m=3$. ……5 分

(Ⅱ)由(Ⅰ),即证 $(\dfrac{1}{a}+1+\dfrac{b^2}{a})(\dfrac{1}{b}+1+\dfrac{a^2}{b})\geqslant 9$.

$\because a,b\in(0,+\infty)$,

$\therefore \dfrac{1}{a}+1+\dfrac{b^2}{a}\geqslant 3\sqrt[3]{\dfrac{b^2}{a^2}}$, $\dfrac{1}{b}+1+\dfrac{a^2}{b}\geqslant 3\sqrt[3]{\dfrac{a^2}{b^2}}$. ……7 分

$\therefore (\dfrac{1}{a}+1+\dfrac{b^2}{a})(\dfrac{1}{b}+1+\dfrac{a^2}{b})\geqslant 3\sqrt[3]{\dfrac{b^2}{a^2}}\cdot 3\sqrt[3]{\dfrac{a^2}{b^2}}=9$. ……9 分

当且仅当 $\begin{cases}\dfrac{1}{a}=1=\dfrac{b^2}{a},\\ \dfrac{1}{b}=1=\dfrac{a^2}{b}\end{cases}$ 即 $a=b=1$ 时,等号成立. ……10 分