成都市2018级高中毕业班第二次诊断性检测

数学(理科)参考答案及评分意见

第Ⅰ卷 (选择题,共60分)

一、选择题:(每小题5分,共60分)

1. A; 2. D; 3. C; 4. B; 5. D; 6. A; 7. B; 8. C; 9. C; 10. B; 11. C; 12. B.

第Ⅱ卷 (非选择题,共90分)

二、填空题:(每小题5分,共20分)

13. -1; 14. 3; 15. $\frac{1}{2}$; 16. $b<c<a$.

三、解答题:(共70分)

17. 解:(Ⅰ)由已知及正弦定理,得 $\sqrt{2}\sin B\cos C-\sin A\cos C=\sin C\cos A$. ……2分

$\therefore \sqrt{2}\sin B\cos C=\sin A\cos C+\cos A\sin C=\sin(A+C)$. ……3分

$\because A+C=\pi-B$, $\therefore \sin(A+C)=\sin B$.

$\therefore \sqrt{2}\sin B\cos C=\sin B$. ……4分

又 $\because \sin B\neq 0$, $\therefore \cos C=\frac{\sqrt{2}}{2}$. ……5分

$\because C\in(0,\pi)$, $\therefore C=\frac{\pi}{4}$. ……6分

(Ⅱ)由已知及余弦定理,得 $ac\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}-bc\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=b^2$. ……8分

化简,得 $a^2=2b^2$. ……9分

又 $\because a=\sqrt{2}$, $\therefore b=1$. ……10分

$\therefore$ $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times 1\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}$. ……12分

18. 解:(Ⅰ)由题意,知 $\bar{x}=\frac{1+2+3+4+5+6+7}{7}=4$, ……1分

$\bar{y}=\frac{2.90+3.30+3.60+4.40+4.80+5.20+5.90}{7}=4.30$, ……2分

$\sum_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})^2=(1-4)^2+(2-4)^2+(3-4)^2+(4-4)^2+(5-4)^2+(6-4)^2+(7-4)^2=28$. ……3分

$\therefore r=\frac{14.00}{\sqrt{28\times 7.08}}=\frac{14.00}{\sqrt{198.24}}\approx\frac{14.00}{14.10}\approx 0.99$. ……5分

因为 y 与 x 的相关系数近似为0.99,所以 y 与 x 的线性相关程度相当大,从而可以用线性回归模型拟合 y 与 x 的关系. ……6分

(Ⅱ)$\because \hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})^2}=\dfrac{14}{28}=0.5$， ……8 分

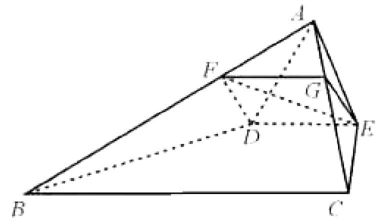
$\therefore \hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=4.3-0.5\times 4=2.3$. ……9 分

$\therefore$ y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=0.5x+2.3$. ……10 分

将 $x=10$ 代入线性回归方程，得 $\hat{y}=0.5\times 10+2.3=7.3$.

$\therefore$ 估算该种机械设备使用 10 年的失效费为 7.3 万元. ……12 分

19. 解：(Ⅰ)如图，在棱 AC 上取点 G 满足 $CG=2AG$，连接 EG，FG. ……1 分



$\because \overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{FA}$，$\therefore FG \,/\!/\, BC$ 且 $FG=\dfrac{1}{3}BC$.

又由题意，可得 $DE \,/\!/\, BC$ 且 $DE=\dfrac{1}{3}BC$.

$\therefore$ $DE=FG$ 且 $DE \,/\!/\, FG$.

$\therefore$ 四边形 $DEGF$ 为平行四边形. ……3 分

$\therefore DF \,/\!/\, EG$.

又 $\because DF \not\subset$ 平面 ACE，$EG\subset$ 平面 ACE，

$\therefore DF \,/\!/\,$ 平面 ACE. ……5 分

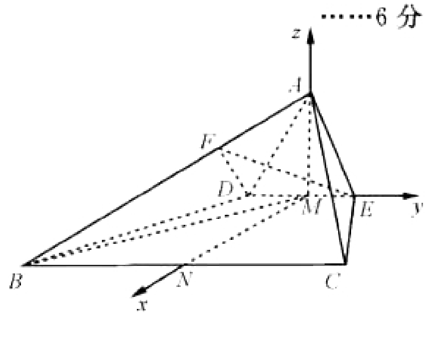
(Ⅱ)如图，分别取 DE，BC 的中点 M，N，连接 AM，MN，BM.

由题意，知 $MN\perp BC$，$AM=2$，$MN=4$，$BN=3$.

在 Rt$\triangle BMN$ 中，$BM=\sqrt{BN^2+MN^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

在$\triangle ABM$ 中，$\because AB=\sqrt{29}$，$\therefore AM^2+BM^2=2^2+5^2=29=AB^2$.

$\therefore AM\perp BM$. ……6 分



又 $AM\perp DE$，$BM\cap DE=M$，$BM, DE\subset$ 平面 $BCED$，

$\therefore AM\perp$ 平面 $BCED$. ……7 分

以 M 为坐标原点，$\overrightarrow{MN}$，$\overrightarrow{ME}$，$\overrightarrow{MA}$ 的方向分别为 x 轴，y 轴，z 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $Mxyz$.

则 $M(0,0,0)$，$A(0,0,2)$，$B(4,-3,0)$，$C(4,3,0)$，$D(0,-1,0)$，$E(0,1,0)$，$F(\dfrac{4}{3},-1,\dfrac{4}{3})$.

$\therefore \overrightarrow{EC}=(4,2,0)$，$\overrightarrow{EA}=(0,-1,2)$，$\overrightarrow{DE}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{DF}=(\dfrac{4}{3},0,\dfrac{4}{3})$. ……8 分

设平面 ACE 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，平面 DEF 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$.

由 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{EC}=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{EA}=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}4x_1+2y_1=0\\ -y_1+2z_1=0\end{cases}$. 令 $z_1=1$，得 $\boldsymbol{m}=(-1,2,1)$. ……9 分

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DE}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DF}=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}2y_2=0\\ \dfrac{4}{3}x_2+\dfrac{4}{3}z_2=0\end{cases}$. 令 $z_2=1$，得 $\boldsymbol{n}=(-1,0,1)$. ……10 分

$\therefore \cos < \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} > = \dfrac{\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|} = \dfrac{2}{\sqrt{6} \times \sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. ……11 分

$\therefore$ 平面 ACE 与平面 DEF 所成锐二面角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. ……12 分

20. 解:(Ⅰ)由已知,得 $a=2$. $\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. ……1 分

$\because$ 椭圆 C 经过点 $A(1,\dfrac{\sqrt{3}}{2})$, $\therefore \dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4b^2}=1$,解得 $b^2=1$. ……3 分

$\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. ……4 分

(Ⅱ)由题意,知直线 l 的斜率存在且不为 0,设直线 l 的方程为 $x=ty-1(t\neq 0)$, $D(x_1,y_1),E(x_2,y_2)$.

由 $\begin{cases} x=ty-1 \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$,消去 x,得 $(t^2+4)y^2-2ty-3=0$. ……5 分

$\because \Delta=4t^2+12(t^2+4)=16t^2+48>0$,

$\therefore y_1+y_2=\dfrac{2t}{t^2+4}, y_1y_2=-\dfrac{3}{t^2+4}$. ……6 分

$\because$ F 为点 E 关于 x 轴的对称点, $\therefore F(x_2,-y_2)$.

$\therefore$ 直线 DF 的方程为 $y-y_1=\dfrac{y_1+y_2}{x_1-x_2}(x-x_1)$,

即 $y-y_1=\dfrac{y_1+y_2}{t(y_1-y_2)}(x-x_1)$. ……7 分

令 $y=0$,则 $x=x_1+\dfrac{-ty_1^2+ty_1y_2}{y_1+y_2}=\dfrac{(ty_1-1)(y_1+y_2)-ty_1^2+ty_1y_2}{y_1+y_2}$

$=\dfrac{2ty_1y_2-(y_1+y_2)}{y_1+y_2}=2t\cdot(-\dfrac{3}{2t})-1=-4$.

$\therefore G(-4,0)$. ……8 分

$\therefore \triangle DEG$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}|BG|\cdot|y_1-y_2|=\dfrac{3}{2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$

$=\dfrac{3}{2}\sqrt{(\dfrac{2t}{t^2+4})^2+\dfrac{12}{t^2+4}}=\dfrac{6\sqrt{t^2+3}}{t^2+4}$. ……10 分

令 $m=\sqrt{t^2+3}$,则 $m\in(\sqrt{3},+\infty)$.

$\therefore S=\dfrac{6m}{m^2+1}=\dfrac{6}{m+\dfrac{1}{m}}$.

$\because m+\dfrac{1}{m}\in(\dfrac{4\sqrt{3}}{3},+\infty)$, $\therefore S\in(0,\dfrac{3\sqrt{3}}{2})$.

$\therefore \triangle DEG$ 的面积 S 的取值范围为 $(0,\dfrac{3\sqrt{3}}{2})$. ……12 分

21. 解：(Ⅰ)由已知，可得 $f'(x)=1-\frac{a}{x^2}-\frac{a-1}{x}=\frac{(x+1)(x-a)}{x^2}(x>0)$. ……1 分

①若 $a\leqslant 0$，则当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，

∴ $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，与 $f(x)$ 存在极值点矛盾； ……2 分

②若 $a>0$，则由 $f'(x)=0$ 得 $x=a$.

∴当 $x\in(0,a)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(a,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$.

∴ $f(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递减，在 $(a,+\infty)$ 上单调递增.

∴ $f(x)$ 存在唯一极小值点 $x=a$.

∴ $f(a)=a+1-(a-1)\ln a-2=(a-1)(1-\ln a)=0$. ……3 分

∴ $a=1$ 或 $a=\mathrm{e}$. ……4 分

(Ⅱ)①当 $a\leqslant 1$ 时，$f'(x)\geqslant 0$ 在 $[1,\mathrm{e}^2]$ 上恒成立，∴ $f(x)$ 在 $[1,\mathrm{e}^2]$ 上单调递增.

∵ $f(1)=a-1\leqslant 0$，$f(\mathrm{e}^2)=\mathrm{e}^2+\frac{a}{\mathrm{e}^2}-2a$，

(i)当 $a\leqslant 0$ 时，$f(\mathrm{e}^2)=\mathrm{e}^2+\frac{a}{\mathrm{e}^2}-2a=\mathrm{e}^2+a(\frac{1}{\mathrm{e}^2}-2)>0$；

(ii)当 $0<a\leqslant 1$ 时，$f(\mathrm{e}^2)=\mathrm{e}^2+\frac{a}{\mathrm{e}^2}-2a>2\sqrt{a}-2a=2\sqrt{a}(1-\sqrt{a})\geqslant 0$.

∴ $f(\mathrm{e}^2)>0$.

∴由零点存在性定理，知 $f(x)$ 在 $[1,\mathrm{e}^2]$ 上有 1 个零点； ……6 分

②当 $1<a<\mathrm{e}^2$ 时，

∵当 $x\in[1,a)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(a,\mathrm{e}^2]$ 时，$f'(x)>0$，

∴ $f(x)$ 在 $[1,a)$ 上单调递减，在 $(a,\mathrm{e}^2]$ 上单调递增.

∴ $f(x)_{\min}=f(a)=(a-1)(1-\ln a)$.

(i)当 $a=\mathrm{e}$ 时，$f(x)_{\min}=0$，此时 $f(x)$ 在 $[1,\mathrm{e}^2]$ 上有 1 个零点； ……7 分

(ii)当 $1<a<\mathrm{e}$ 时，$f(x)_{\min}>0$，此时 $f(x)$ 在 $[1,\mathrm{e}^2]$ 上无零点； ……8 分

(iii)当 $\mathrm{e}<a<\mathrm{e}^2$ 时，$f(x)_{\min}<0$，$f(1)=a-1>0$.

(a)当 $f(\mathrm{e}^2)=\mathrm{e}^2+\frac{a}{\mathrm{e}^2}-2a<0$，即 $\frac{\mathrm{e}^4}{2\mathrm{e}^2-1}<a<\mathrm{e}^2$ 时，$f(x)$ 在 $[1,\mathrm{e}^2]$ 上有 1 个零点；

(b)当 $f(\mathrm{e}^2)=\mathrm{e}^2+\frac{a}{\mathrm{e}^2}-2a\geqslant 0$，即 $\mathrm{e}<a\leqslant\frac{\mathrm{e}^4}{2\mathrm{e}^2-1}$ 时，$f(x)$ 在 $[1,\mathrm{e}^2]$ 上有 2 个零点；

……10 分

③当 $a\geqslant\mathrm{e}^2$ 时，$f'(x)\leqslant 0$ 在 $[1,\mathrm{e}^2]$ 上恒成立，∴ $f(x)$ 在 $[1,\mathrm{e}^2]$ 上单调递减.

∵ $f(1)=a-1>0$，$f(\mathrm{e}^2)=\mathrm{e}^2+(\frac{1}{\mathrm{e}^2}-2)a\leqslant\mathrm{e}^2+(\frac{1}{\mathrm{e}^2}-2)\mathrm{e}^2=-\mathrm{e}^2+1<0$，

∴ $f(x)$ 在 $[1,\mathrm{e}^2]$ 上有 1 个零点. ……11 分

综上，当 $1<a<\mathrm{e}$ 时，$f(x)$ 在 $[1,\mathrm{e}^2]$ 上无零点；

当 $a\leqslant 1$ 或 $a=\mathrm{e}$ 或 $a>\frac{\mathrm{e}^4}{2\mathrm{e}^2-1}$ 时，$f(x)$ 在 $[1,\mathrm{e}^2]$ 上有 1 个零点；

当 $\mathrm{e}<a\leqslant\frac{\mathrm{e}^4}{2\mathrm{e}^2-1}$ 时，$f(x)$ 在 $[1,\mathrm{e}^2]$ 上有 2 个零点. ……12 分

22. 解:(Ⅰ)由曲线 C 的参数方程,得曲线 C 的普通方程为

$(x-1)^2+y^2=\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$. ……1 分

由极坐标与直角坐标的互化公式 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$,得

曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=2\cos\theta$, ……3 分

直线 l 的极坐标方程为 $\rho\cos\theta+\sqrt{3}\rho\sin\theta-6=0$,即 $\rho\sin(\theta+\frac{\pi}{6})=3$. ……5 分

(Ⅱ)设点 P 的极坐标为 (ρ_1,θ),点 Q 的极坐标为 (ρ_2,θ),其中 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$.

由(Ⅰ)知 $|OP|=\rho_1=\dfrac{6}{\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}$, $|OQ|=\rho_2=2\cos\theta$. ……7 分

$\therefore \dfrac{|OP|}{|OQ|}=\dfrac{\rho_1}{\rho_2}=\dfrac{6}{2\cos^2\theta+2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{6}{1+\cos2\theta+\sqrt{3}\sin2\theta}$

$=\dfrac{6}{1+2\sin(2\theta+\frac{\pi}{6})}$. ……9 分

$\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}$, $\therefore \frac{\pi}{6}<2\theta+\frac{\pi}{6}<\frac{7\pi}{6}$. $\therefore -\frac{1}{2}<\sin(2\theta+\frac{\pi}{6})\leqslant 1$.

$\therefore$ 当 $\sin(2\theta+\frac{\pi}{6})=1$,即 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 时,$\dfrac{|OP|}{|OQ|}$ 取得最小值 2. ……10 分

23. 解:(Ⅰ)当 $x<-1$ 时,$f(x)=-3x-3-2x+1=-5x-2>3$; ……1 分

当 $-1\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$ 时,$f(x)=3x+3-2x+1=x+4\in[3,\frac{9}{2}]$; ……2 分

当 $x>\frac{1}{2}$ 时,$f(x)=3x+3+2x-1=5x+2>\frac{9}{2}$. ……3 分

综上,当 $x=-1$ 时,$f(x)_{\min}=3$,$\therefore m=3$. ……5 分

(Ⅱ)由(Ⅰ),即证 $(\frac{1}{a}+1+\frac{b^2}{a})(\frac{1}{b}+1+\frac{a^2}{b})\geqslant 9$.

$\because a,b\in(0,+\infty)$,

$\therefore \frac{1}{a}+1+\frac{b^2}{a}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}$, $\frac{1}{b}+1+\frac{a^2}{b}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}$. ……7 分

$\therefore (\frac{1}{a}+1+\frac{b^2}{a})(\frac{1}{b}+1+\frac{a^2}{b})\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}\cdot 3\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}=9$. ……9 分

当且仅当 $\begin{cases}\frac{1}{a}=1=\frac{b^2}{a},\\ \frac{1}{b}=1=\frac{a^2}{b}\end{cases}$ 即 $a=b=1$ 时,等号成立. ……10 分