

成都市 2018 级高中毕业班第二次诊断性检测

数 学(理科)

本试卷分选择题和非选择题两部分。第 I 卷(选择题)1 至 2 页,第 II 卷(非选择题)3 至 4 页,共 4 页,满分 150 分,考试时间 120 分钟。

注意事项:

1. 答题前,务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上。
2. 答选择题时,必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦擦干净后,再选涂其它答案标号。
3. 答非选择题时,必须使用 0.5 毫米黑色签字笔,将答案书写在答题卡规定的位置上。
4. 所有题目必须在答题卡上作答,在试题卷上答题无效。
5. 考试结束后,只将答题卡交回。

第 I 卷 (选择题,共 60 分)

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合  $A = \{x \mid \lg x < 1\}$ ,  $B = \{x \mid x > 3\}$ , 则  $A \cup B =$   
(A)  $(0, +\infty)$  (B)  $(3, 10)$  (C)  $(-\infty, +\infty)$  (D)  $(3, +\infty)$
2. 已知  $i$  为虚数单位,则复数  $z = (1+i)(2-i)$  的虚部为  
(A)  $-i$  (B)  $i$  (C)  $-1$  (D)  $1$
3. 命题“ $\forall x > 0, x^2 + x + 1 > 0$ ”的否定为  
(A)  $\exists x_0 \leq 0, x_0^2 + x_0 + 1 \leq 0$  (B)  $\forall x \leq 0, x^2 + x + 1 \leq 0$   
(C)  $\exists x_0 > 0, x_0^2 + x_0 + 1 \leq 0$  (D)  $\forall x > 0, x^2 + x + 1 \leq 0$
4. 袋子中有 5 个大小质地完全相同的球,其中 3 个红球和 2 个白球,从中不放回地依次随机摸出两个球,则摸出的两个球颜色相同的概率为  
(A)  $\frac{1}{5}$  (B)  $\frac{2}{5}$  (C)  $\frac{3}{5}$  (D)  $\frac{4}{5}$
5. 已知  $\sin(\alpha + \beta) = \frac{2}{3}$ ,  $\sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{3}$ , 则  $\frac{\tan \alpha}{\tan \beta}$  的值为  
(A)  $-\frac{1}{3}$  (B)  $\frac{1}{3}$  (C)  $-3$  (D)  $3$

6. 在  $\triangle ABC$  中,已知  $AB = AC$ ,  $D$  为  $BC$  边中点,点  $O$  在直线  $AD$  上,且  $\vec{BC} \cdot \vec{BO} = 3$ , 则  $BC$  边的长度为  
(A)  $\sqrt{6}$  (B)  $2\sqrt{3}$  (C)  $2\sqrt{6}$  (D)  $6$
7. 已知圆柱的两个底面的圆周在体积为  $\frac{32\pi}{3}$  的球  $O$  的球面上,则该圆柱的侧面积的最大值为  
(A)  $4\pi$  (B)  $8\pi$  (C)  $12\pi$  (D)  $16\pi$
8. 已知  $P$  是曲线  $y = \sin x + \cos x (x \in [0, \frac{3\pi}{4}])$  上的动点,点  $Q$  在直线  $x + y - 6 = 0$  上运动,则当  $|PQ|$  取最小值时,点  $P$  的横坐标为  
(A)  $\frac{\pi}{4}$  (B)  $\frac{\pi}{3}$  (C)  $\frac{\pi}{2}$  (D)  $\frac{2\pi}{3}$
9. 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$  满足  $S_n = n^2$ , 记数列  $\{\frac{1}{a_n a_{n+1}}\}$  的前  $n$  项和为  $T_n, n \in \mathbb{N}^+$ . 则使得  $T_n < \frac{20}{41}$  成立的  $n$  的最大值为  
(A) 17 (B) 18 (C) 19 (D) 20
10. 某工厂产生的废气经过过滤后排放,过滤过程中废气的污染物数量  $P$  (mg/L) 与时间  $t$  (h) 之间的关系为  $P = P_0 e^{-kt}$ . 如果前 2 小时消除了 20% 的污染物,则污染物减少 50% 大约需要的时间为(参考数据:  $\ln 2 \approx 0.69, \ln 3 \approx 1.10, \ln 5 \approx 1.61$ )  
(A) 4h (B) 6h (C) 8h (D) 10h
11. 已知  $F$  为抛物线  $y^2 = 2x$  的焦点,  $A$  为抛物线上的动点,点  $B(-1, 0)$ . 则当  $\frac{2|AB|}{2|AF| + 1}$  取最大值时,  $|AB|$  的值为  
(A) 2 (B)  $\sqrt{5}$  (C)  $\sqrt{6}$  (D)  $2\sqrt{2}$
12. 已知四面体  $ABCD$  的所有棱长均为  $\sqrt{2}$ ,  $M, N$  分别为棱  $AD, BC$  的中点,  $F$  为棱  $AB$  上异于  $A, B$  的动点. 有下列结论:  
① 线段  $MN$  的长度为 1;  
② 若点  $G$  为线段  $MN$  上的动点,则无论点  $F$  与  $G$  如何运动,直线  $FG$  与直线  $CD$  都是异面直线;  
③  $\angle MFN$  的余弦值的取值范围为  $[0, \frac{\sqrt{5}}{5})$ ;  
④  $\triangle FMN$  周长的最小值为  $\sqrt{2} + 1$ .  
其中正确结论的个数为  
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

## 第 II 卷 (非选择题, 共 90 分)

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在答题卡上.

13. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x < 1, \\ 2^x + 1, & x \geq 1. \end{cases}$  若  $f(a) = 2$ , 则  $a$  的值为 \_\_\_\_\_.

14. 正项数列  $\{a_n\}$  满足  $a_n a_{n+2} = a_{n+1}^2, n \in \mathbf{N}^+$ . 若  $a_3 = \frac{1}{9}, a_2 a_4 = 1$ , 则  $a_2$  的值为 \_\_\_\_\_.

15. 设双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 以  $F_1 F_2$  为直径的圆与双曲线在第一象限内的交点为  $P$ , 直线  $P F_1$  与双曲线的渐近线在第二象限内的交点为  $Q$ . 若点  $Q$  恰好为线段  $P F_1$  的中点, 则直线  $P F_1$  的斜率的值为 \_\_\_\_\_.

16. 已知定义在  $\mathbf{R}$  上的函数  $f(x)$  满足  $f(x) = f(2-x)$ , 且对任意的  $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$ , 当  $x_1 \neq x_2$  时, 都有  $x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) < x_1 f(x_2) + x_2 f(x_1)$  成立. 若  $a = f(\ln 2), b = f(\log_{0.2} 0.03), c = f(2^{0.7})$ , 则  $a, b, c$  的大小关系为 \_\_\_\_\_ (用符号“ $<$ ”连接).

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

$\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 已知  $(\sqrt{2}b - a)\cos C = c\cos A$ .

(I) 求角  $C$  的大小;

(II) 若  $a = \sqrt{2}, c(a\cos B - b\cos A) = b^2$ , 求  $\triangle ABC$  的面积.

18. (本小题满分 12 分)

某种机械设备随着使用年限的增加, 它的使用功能逐渐减退, 使用价值逐年减少, 通常把它使用价值逐年减少的“量”换算成费用, 称之为“失效费”. 某种机械设备的使用年限  $x$  (单位: 年) 与失效费  $y$  (单位: 万元) 的统计数据如下表所示:

使用年限 $x$ (单位: 年)	1	2	3	4	5	6	7
失效费 $y$ (单位: 万元)	2.90	3.30	3.60	4.40	4.80	5.20	5.90

(I) 由上表数据可知, 可用线性回归模型拟合  $y$  与  $x$  的关系, 请用相关系数加以说明; (精确到 0.01)

(II) 求出  $y$  关于  $x$  的线性回归方程, 并估算该种机械设备使用 10 年的失效费.

$$\text{参考公式: 相关系数 } r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

线性回归方程  $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$  中斜率和截距最小二乘估计计算公式:

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$$

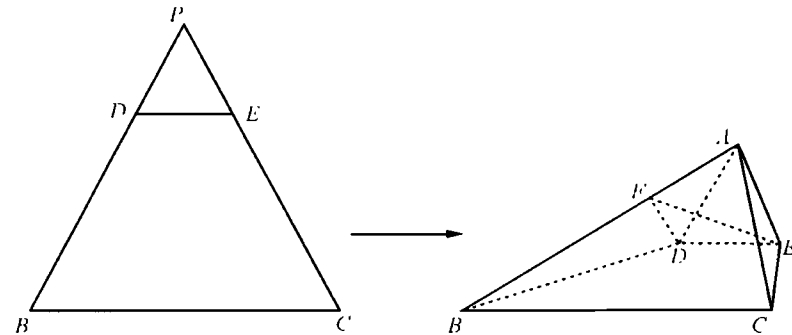
$$\text{参考数据: } \sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 14.00, \sum_{i=1}^7 (y_i - \bar{y})^2 = 7.08, \sqrt{198.24} \approx 14.10$$

19. (本小题满分 12 分)

如图①, 在等腰三角形  $PBC$  中,  $PB = PC = 3\sqrt{5}, BC = 6, D, E$  满足  $\vec{BD} = 2\vec{DP}, \vec{CE} = 2\vec{EP}$ . 将  $\triangle PDE$  沿直线  $DE$  折起到  $\triangle ADE$  的位置, 连接  $AB, AC$ , 得到如图②所示的四棱锥  $A-BCED$ , 点  $F$  满足  $\vec{BF} = 2\vec{FA}$ .

(I) 证明:  $DF \parallel$  平面  $ACE$ ;

(II) 当  $AB = \sqrt{29}$  时, 求平面  $ACE$  与平面  $DEF$  所成锐二面角的余弦值.



图①

图②

20. (本小题满分 12 分)

已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  经过点  $A(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ , 其长半轴长为 2.

(I) 求椭圆  $C$  的方程;

(II) 设经过点  $B(-1, 0)$  的直线  $l$  与椭圆  $C$  相交于  $D, E$  两点, 点  $E$  关于  $x$  轴的对称点为  $F$ , 直线  $DF$  与  $x$  轴相交于点  $G$ , 求  $\triangle DEG$  的面积  $S$  的取值范围.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = x + \frac{a}{x} - (a-1)\ln x - 2$ , 其中  $a \in \mathbf{R}$ .

(I) 若  $f(x)$  存在唯一极值点, 且极值为 0, 求  $a$  的值;

(II) 讨论  $f(x)$  在区间  $[1, e^2]$  上的零点个数.

请考生在第 22, 23 题中任选择一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题记分. 作答时, 用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目对应的标号涂黑.

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在直角坐标系  $xOy$  中, 已知曲线  $C$  的参数方程为  $\begin{cases} x = 1 + \cos\varphi, \\ y = \sin\varphi \end{cases}$  ( $\varphi$  为参数), 直线  $l$  的方程

为  $x + \sqrt{3}y - 6 = 0$ . 以坐标原点  $O$  为极点,  $x$  轴的正半轴为极轴建立极坐标系.

(I) 求曲线  $C$  和直线  $l$  的极坐标方程;

(II) 若点  $P(x, y)$  在直线  $l$  上且  $y > 0$ , 射线  $OP$  与曲线  $C$  相交于异于  $O$  点的点  $Q$ , 求  $|\frac{OP}{OQ}|$  的最小值.

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

设函数  $f(x) = 3|x+1| + |2x-1|$  的最小值为  $m$ .

(I) 求  $m$  的值;

(II) 若  $a, b \in (0, +\infty)$ , 证明:  $(\frac{1}{a} + 1 + \frac{b^2}{a})(\frac{1}{b} + 1 + \frac{a^2}{b}) \geq m^2$ .

成都市2018级高中毕业班第二次诊断性检测  
数学(理科)答题卡

姓名	座位号
贴条形码区 (正面朝上切勿贴出虚线框外)	
考籍号	

<b>考生禁填</b>	<b>注意事项</b>
缺考标记 <input type="checkbox"/> 缺考考生由监考员贴条形码,并用2B铅笔填涂上面的缺考标记。	
1. 答题前,考生务必先认真核对条形码上的姓名、考籍号和座位号,无误后将本人姓名、考籍号和座位号填写在相应位置,同时将背面左上角相应的座位号涂黑。 2. 选择题填涂时,必须使用2B铅笔按图示规范填涂;非选择题必须使用0.5毫米的黑色墨迹签字笔作答。 3. 必须在题目所指示的答题区域内作答,超出答题区域的答案无效,在草稿纸、试题卷上答题无效。 4. 保持答题卡清洁、完整,严禁折叠,严禁使用涂改液和修正带。	

**第 I 卷** (须用2B铅笔填涂)

填涂样例 错误填涂 正确填涂

1 [A] [B] [C] [D]	6 [A] [B] [C] [D]	11 [A] [B] [C] [D]
2 [A] [B] [C] [D]	7 [A] [B] [C] [D]	12 [A] [B] [C] [D]
3 [A] [B] [C] [D]	8 [A] [B] [C] [D]	
4 [A] [B] [C] [D]	9 [A] [B] [C] [D]	
5 [A] [B] [C] [D]	10 [A] [B] [C] [D]	

**第 II 卷 【必考题】** (须用0.5毫米的黑色字迹中性笔书写)

13. .... 14. .... 15. .... 16. ....

17.

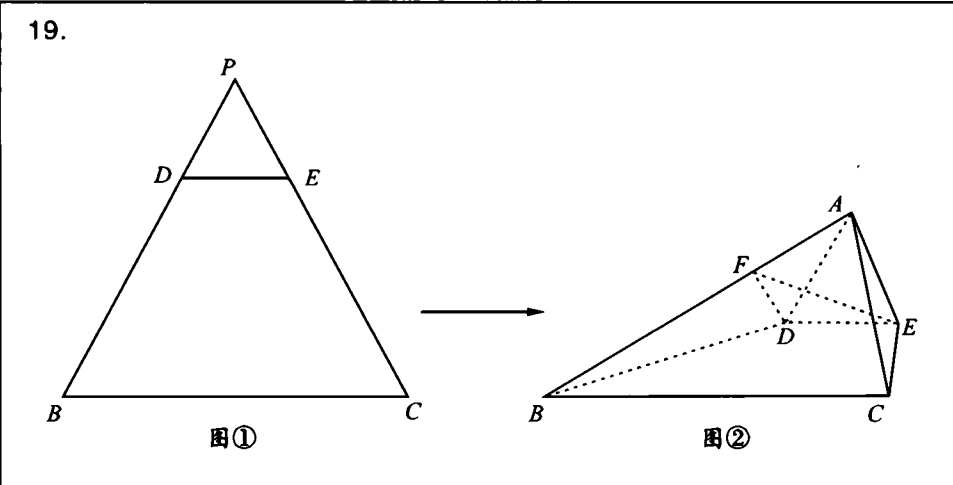
请在各题规定的黑色矩形区域内答题,超出该区域的答案无效!

请在各题规定的黑色矩形区域内答题,超出该区域的答案无效!

18.

请在各题规定的黑色矩形区域内答题,超出该区域的答案无效!

请在各题规定的黑色矩形区域内答题,超出该区域的答案无效!



请在各题规定的黑色矩形区域内答题,超出该区域的答案无效!

请在各题目的答题区域内作答,超出答题区域的答案无效

请在各题规定的黑色矩形区域内答题, 超出该区域的答案无效!

20.

请在各题规定的黑色矩形区域内答题, 超出该区域的答案无效!

请在各题规定的黑色矩形区域内答题, 超出该区域的答案无效!

21.

请在各题规定的黑色矩形区域内答题, 超出该区域的答案无效!

请在各题规定的黑色矩形区域内答题, 超出该区域的答案无效!

**第 II 卷【选考题】** 以下为选考题, 每个答题区只允许选答一题, 答题前, 请考生务必将所选题号用2B铅笔涂黑。

请考生从22、23二题中任选一题做答, 并用2B铅笔将所选题号涂黑, 多涂、错涂、漏涂均不给分, 如果多做, 则按所做的第一题计分。

请在各题规定的黑色矩形区域内答题, 超出该区域的答案无效!

请在各题目的答题区域内作答, 超出答题区域的答案无效

请在各题目的答题区域内作答, 超出答题区域的答案无效