

成都市 2018 级高中毕业班第二次诊断性检测

数 学(文科)

本试卷分选择题和非选择题两部分。第 I 卷(选择题)1 至 2 页,第 II 卷(非选择题)3 至 4 页,共 4 页,满分 150 分,考试时间 120 分钟。

注意事项:

1. 答题前,务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上。
2. 答选择题时,必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦擦干净后,再选涂其它答案标号。
3. 答非选择题时,必须使用 0.5 毫米黑色签字笔,将答案书写在答题卡规定的位置上。
4. 所有题目必须在答题卡上作答,在试题卷上答题无效。
5. 考试结束后,只将答题卡交回。

第 I 卷 (选择题,共 60 分)

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A = \{x \mid \lg x < 1\}$, $B = \{x \mid x > 3\}$, 则 $A \cup B =$
(A) $(0, +\infty)$ (B) $(3, 10)$ (C) $(-\infty, +\infty)$ (D) $(3, +\infty)$
2. 已知 i 为虚数单位,则复数 $z = (1+i)(2-i)$ 的虚部为
(A) $-i$ (B) i (C) -1 (D) 1
3. 命题“ $\forall x > 0, x^2 + x + 1 > 0$ ”的否定为
(A) $\exists x_0 \leq 0, x_0^2 + x_0 + 1 \leq 0$ (B) $\forall x \leq 0, x^2 + x + 1 \leq 0$
(C) $\exists x_0 > 0, x_0^2 + x_0 + 1 \leq 0$ (D) $\forall x > 0, x^2 + x + 1 \leq 0$
4. 袋子中有 5 个大小质地完全相同的球,其中 3 个红球和 2 个白球,从中不放回地依次随机摸出两个球,则摸出的两个球颜色相同的概率为
(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{4}{5}$
5. 已知 $\sin(\alpha + \beta) = \frac{2}{3}$, $\sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{3}$, 则 $\frac{\tan \alpha}{\tan \beta}$ 的值为
(A) $-\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) -3 (D) 3

6. 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $AB = AC$, D 为 BC 边中点,点 O 在直线 AD 上,且 $\vec{BC} \cdot \vec{BO} = 3$, 则 BC 边的长度为
(A) $\sqrt{6}$ (B) $2\sqrt{3}$ (C) $2\sqrt{6}$ (D) 6
7. 已知圆柱的两个底面的圆周在体积为 $\frac{32\pi}{3}$ 的球 O 的球面上,则该圆柱的侧面积的最大值为
(A) 4π (B) 8π (C) 12π (D) 16π
8. 已知 P 是曲线 $y = -\sin x (x \in [0, \pi])$ 上的动点,点 Q 在直线 $x - 2y - 6 = 0$ 上运动,则当 $|PQ|$ 取最小值时,点 P 的横坐标为
(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) $\frac{2\pi}{3}$ (D) $\frac{5\pi}{6}$
9. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n = n^2$, 记数列 $\left\{\frac{1}{a_n a_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和为 $T_n, n \in \mathbb{N}^+$. 则 T_{20} 的值为
(A) $\frac{19}{39}$ (B) $\frac{38}{39}$ (C) $\frac{20}{41}$ (D) $\frac{40}{41}$
10. 某工厂产生的废气经过过滤后排放,过滤过程中废气的污染物数量 P (mg/L) 与时间 t (h) 之间的关系为 $P = P_0 e^{-kt}$. 如果前 2 小时消除了 20% 的污染物,则污染物减少 50% 大约需要的时间为(参考数据: $\ln 2 \approx 0.69, \ln 3 \approx 1.10, \ln 5 \approx 1.61$)
(A) 4h (B) 6h (C) 8h (D) 10h
11. 已知 F 为抛物线 $y^2 = 2x$ 的焦点, A 为抛物线上的动点,点 $B(-\frac{1}{2}, 0)$. 则当 $\frac{|AB|}{|AF|}$ 取最大值时, $|AB|$ 的值为
(A) 2 (B) $\sqrt{3}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) 1
12. 已知四面体 $ABCD$ 的所有棱长均为 $\sqrt{2}$, M, N 分别为棱 AD, BC 的中点, F 为棱 AB 上异于 A, B 的动点. 有下列结论:
① 线段 MN 的长度为 1;
② 存在点 F , 满足 $CD \perp$ 平面 FMN ;
③ $\angle MFN$ 的余弦值的取值范围为 $[0, \frac{\sqrt{5}}{5})$;
④ $\triangle FMN$ 周长的最小值为 $\sqrt{2} + 1$.
其中所有正确结论的编号为
(A) ①③ (B) ①④ (C) ①②④ (D) ②③④

第 II 卷 (非选择题, 共 90 分)

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在答题卡上.

13. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x < 1, \\ 2^x + 1, & x \geq 1. \end{cases}$ 若 $f(a) = 2$, 则 a 的值为 _____.

14. 正项等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_7 = \frac{1}{9}$, 且 $a_2 a_4 = 1$, 则该数列的公比的值为 _____.

15. 设双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 以 $F_1 F_2$ 为直径的圆与双曲线在第一象限内的交点为 P , 直线 $P F_1$ 与双曲线的渐近线在第二象限内的交点为 Q . 若点 Q 恰好为线段 $P F_1$ 的中点, 则直线 $P F_1$ 的斜率的值为 _____.

16. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数, 且在 $[0, +\infty)$ 上单调递减. 若 $a = f(\log_{0.2} 0.3)$, $b = f(\log_3 0.1)$, $c = f(2^{0.7})$, 则 a, b, c 的大小关系为 _____ (用符号“ $<$ ”连接).

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

$\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $(\sqrt{2}b - a)\cos C = c\cos A$.

(I) 求角 C 的大小;

(II) 若 $a = \sqrt{2}$, $c(a\cos B - b\cos A) = b^2$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. (本小题满分 12 分)

某种机械设备随着使用年限的增加, 它的使用功能逐渐减退, 使用价值逐年减少, 通常把它使用价值逐年减少的“量”换算成费用, 称之为“失效费”. 某种机械设备的使用年限 x (单位: 年) 与失效费 y (单位: 万元) 的统计数据如下表所示:

使用年限 x (单位: 年)	1	2	3	4	5	6	7
失效费 y (单位: 万元)	2.90	3.30	3.60	4.40	4.80	5.20	5.90

(I) 由上表数据可知, 可用线性回归模型拟合 y 与 x 的关系, 请用相关系数加以说明; (精确到 0.01)

(II) 求出 y 关于 x 的线性回归方程, 并估算该种机械设备使用 10 年的失效费.

参考公式: 相关系数 $r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$.

线性回归方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 中斜率和截距最小二乘估计计算公式:

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}.$$

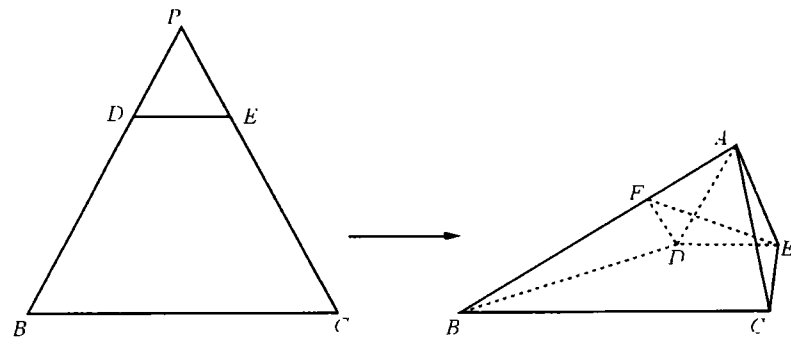
参考数据: $\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 14.00$, $\sum_{i=1}^7 (y_i - \bar{y})^2 = 7.08$, $\sqrt{198.24} \approx 14.10$.

19. (本小题满分 12 分)

如图①, 在等腰三角形 PBC 中, $PB = PC = 3\sqrt{5}$, $BC = 6$, D, E 满足 $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DP}$, $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{EP}$. 将 $\triangle PDE$ 沿直线 DE 折起到 $\triangle ADE$ 的位置, 连接 AB, AC , 得到如图②所示的四棱锥 $A-BCED$, 点 F 在棱 AB 上且满足 $BF = 2AF$.

(I) 证明: $DF \parallel$ 平面 ACE ;

(II) 当 $AB = \sqrt{29}$ 时, 求三棱锥 $A-DEF$ 的体积.



图①

图②

20. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $A(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$, 其长半轴长为 2.

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 设经过点 $B(-1, 0)$ 的直线 l 与椭圆 C 相交于 D, E 两点, 点 E 关于 x 轴的对称点为 F , 直线 DF 与 x 轴相交于点 G , 记 $\triangle BEG$ 与 $\triangle BDG$ 的面积分别为 S_1, S_2 , 求 $|S_1 - S_2|$ 的最大值.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = x + \frac{a}{x} - (a-1)\ln x - 2$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

(I) 若 $f(x)$ 存在唯一极值点, 且极值为 0, 求 a 的值;

(II) 讨论 $f(x)$ 在区间 $[1, e]$ 上的零点个数.

请考生在第 22, 23 题中任选择一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题记分. 作答时, 用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目对应的标号涂黑.

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中, 已知曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + \cos\varphi, \\ y = \sin\varphi \end{cases}$ (φ 为参数), 直线 l 的方程

为 $x + \sqrt{3}y - 6 = 0$. 以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系.

(I) 求曲线 C 和直线 l 的极坐标方程;

(II) 若点 $P(x, y)$ 在直线 l 上且 $y > 0$, 射线 OP 与曲线 C 相交于异于 O 点的点 Q , 求 $\frac{|OP|}{|OQ|}$ 的最小值.

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

设函数 $f(x) = 3|x+1| + |2x-1|$ 的最小值为 m .

(I) 求 m 的值;

(II) 若 $a, b \in (0, +\infty)$, 证明: $(\frac{1}{a} + 1 + \frac{b^2}{a})(\frac{1}{b} + 1 + \frac{a^2}{b}) \geq m^2$.

成都市2018级高中毕业班第二次诊断性检测
数学(文科)答题卡

姓名		座位号	
考籍号			

贴条形码区
(正面朝上切勿贴出虚线框外)

考生禁填
缺考标记

注意事项

- 1 答题前,考生务必先认真核对条形码上的姓名、考籍号和座位号,无误后将本人姓名、考籍号和座位号填写在相应位置,同时将背面左上角相应的座位号涂黑。
- 2 选择题填涂时,必须使用2B铅笔按图示规范填涂;非选择题必须使用0.5毫米的黑色墨迹签字笔作答。
- 3 必须在题目所指示的答题区域内作答,超出答题区域的答案无效,在草稿纸、试题卷上答题无效。
- 4 保持答题卡清洁、完整,严禁折叠,严禁使用涂改液和修正带。

第 I 卷
(须用2B铅笔填涂)

填涂样例 错误填涂 正确填涂

1 [A][B][C][D]	6 [A][B][C][D]	11 [A][B][C][D]
2 [A][B][C][D]	7 [A][B][C][D]	12 [A][B][C][D]
3 [A][B][C][D]	8 [A][B][C][D]	
4 [A][B][C][D]	9 [A][B][C][D]	
5 [A][B][C][D]	10 [A][B][C][D]	

第 II 卷 【必考题】 (须用0.5毫米的黑色字迹中性笔书写)

13. 14. 15. 16.

17.

请在各题规定的黑色矩形区域内答题,超出该区域的答案无效!

请在各题规定的黑色矩形区域内答题,超出该区域的答案无效!

18.

请在各题规定的黑色矩形区域内答题,超出该区域的答案无效!

请在各题规定的黑色矩形区域内答题,超出该区域的答案无效!

19.

图①

图②

请在各题规定的黑色矩形区域内答题,超出该区域的答案无效!

请在各题目的答题区域内作答,超出答题区域的答案无效

请在各题规定的黑色矩形区域内答题, 超出该区域的答案无效!

20.

请在各题规定的黑色矩形区域内答题, 超出该区域的答案无效!

请在各题规定的黑色矩形区域内答题, 超出该区域的答案无效!

21.

请在各题规定的黑色矩形区域内答题, 超出该区域的答案无效!

请在各题规定的黑色矩形区域内答题, 超出该区域的答案无效!

第 II 卷【选考题】 以下为选考题, 每个答题区只允许选答一题, 答题前, 考生务必将所选题号用2B铅笔涂黑。

请考生从22、23二题中任选一题作答, 并用2B铅笔将所选题号涂黑, 多涂、错涂、漏涂均不给分, 如果多做, 则按所做的第一题计分。

[22] [23]

请在各题规定的黑色矩形区域内答题, 超出该区域的答案无效!

请在各题目的答题区域内作答, 超出答题区域的答案无效

请在各题目的答题区域内作答, 超出答题区域的答案无效