成都市2017级高中毕业班第一次诊断性检测

数学(理科)参考答案及评分意见

第Ⅰ卷 (选择题,共60分)

一、选择题:(每小题5分,共60分)

1.B; 2.D; 3.C; 4.A; 5.D; 6.C; 7.B; 8.A; 9.B; 10.C; 11.D; 12.C.

第Ⅱ卷 (非选择题,共90分)

二、填空题:(每小题5分,共20分)

13.6; 14. 3^n; 15. $\dfrac{\pi}{6}$; 16. $\sqrt{3}$.

三、解答题:(共70分)

17.**解**:(Ⅰ)$\because b^2+c^2-a^2=2bc\cos A$,$\therefore 2bc\cos A=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}bc$. ……2分

$\therefore \cos A=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. ……4分

$\therefore$在$\triangle ABC$中,$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\dfrac{1}{3}$. ……6分

(Ⅱ)$\because \triangle ABC$的面积为$\sqrt{2}$,即$\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{6}bc=\sqrt{2}$, ……7分

$\therefore bc=6\sqrt{2}$. ……8分

又$\because \sqrt{2}\sin B=3\sin C$,由正弦定理得$\sqrt{2}b=3c$,

$\therefore b=3\sqrt{2}$,$c=2$. ……10分

则$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=6$,$\therefore a=\sqrt{6}$. ……11分

$\therefore \triangle ABC$的周长为$2+3\sqrt{2}+\sqrt{6}$. ……12分

18. **解**:(Ⅰ)由题,2×2列联表如下:

	属于"追光族"	属于"观望者"	合　计
女性员工	20	40	60
男性员工	20	20	40
合　计	40	60	100

……2分

$\because K^2=\dfrac{100\,(20\times 20-20\times 40)^2}{40\times 60\times 40\times 60}=\dfrac{25}{9}\approx 2.778<3.841$, ……4分

$\therefore$没有95%的把握认为该公司员工属于"追光族"与"性别"有关. ……5分

(Ⅱ)由题,随机变量X所有可能的取值为0,1,2,3.

$P(X=0)=\dfrac{C_3^0C_7^3}{C_{10}^3}=\dfrac{35}{120}=\dfrac{7}{24}$,$P(X=1)=\dfrac{C_3^1C_7^2}{C_{10}^3}=\dfrac{63}{120}=\dfrac{21}{40}$,

$P(X=2)=\dfrac{C_3^2C_7^1}{C_{10}^3}=\dfrac{21}{120}=\dfrac{7}{40}$，$P(X=3)=\dfrac{C_3^3C_7^0}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{120}$． ……9 分

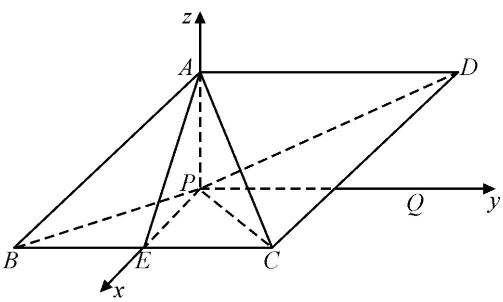
∴ X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{7}{24}$	$\dfrac{21}{40}$	$\dfrac{7}{40}$	$\dfrac{1}{120}$

……10 分

∴ $E(X)=0\times\dfrac{35}{120}+1\times\dfrac{63}{120}+2\times\dfrac{21}{120}+3\times\dfrac{1}{120}=\dfrac{108}{120}=\dfrac{9}{10}$． ……12 分

19．**解**：(Ⅰ)如图，连接 AC．



∵底面 $ABCD$ 为菱形，且 $\angle ABC=60°$，

∴三角形 ABC 为正三角形．

∵ E 为 BC 的中点，∴ $BC\perp AE$．

……2 分

又∵ $AP\perp$ 平面 PBC，$BC\subset$ 平面 PBC，

∴ $BC\perp AP$． ……4 分

∵ $AP\cap AE=A$，$AP,AE\subset$ 平面 PAE，

∴ $BC\perp$ 平面 PAE． ……6 分

(Ⅱ)∵ $AP\perp$ 平面 PBC，$PB\subset$ 平面 PBC，∴ $AP\perp PB$．

又∵ $AB=2$，$PA=1$，∴ $PB=\sqrt{3}$．

由(Ⅰ)，$BC\perp$ 平面 PAE，$PE\subset$ 平面 PAE，∴ $BC\perp PE$．

又∵ E 为 BC 的中点，∴ $PB=PC=\sqrt{3}$，$EC=1$. ∴ $PE=\sqrt{2}$．

如图，过点 P 作 BC 的平行线 PQ，

则 PQ,PE,PA 两两互相垂直. ……7 分

以 P 为坐标原点，$\overrightarrow{PE},\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PA}$ 的方向分别为 x 轴，y 轴，z 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $Pxyz$．

则 $P(0,0,0)$，$A(0,0,1)$，$B(\sqrt{2},-1,0)$，$C(\sqrt{2},1,0)$，$D(0,2,1)$． ……8 分

设平面 BAP 的一个法向量 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，$\overrightarrow{PA}=(0,0,1)$，$\overrightarrow{PB}=(\sqrt{2},-1,0)$．

由 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PA}=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PB}=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}z_1=0\\ \sqrt{2}x_1-y_1=0\end{cases}$．取 $\boldsymbol{m}=(1,\sqrt{2},0)$． ……9 分

设平面 CDP 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，$\overrightarrow{PC}=(\sqrt{2},1,0)$，$\overrightarrow{PD}=(0,2,1)$．

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PD}=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}\sqrt{2}x_2+y_2=0\\ 2y_2+z_2=0\end{cases}$．取 $\boldsymbol{n}=(1,-\sqrt{2},2\sqrt{2})$． ……10 分

∴ $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{-1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{11}}=-\dfrac{\sqrt{33}}{33}$． ……11 分

∴平面 BAP 与平面 CDP 所成锐二面角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{33}}{33}$． ……12 分

20. **解**：(Ⅰ) $f'(x)=\dfrac{a-1}{x}+1-\dfrac{a}{x^2}=\dfrac{x^2+(a-1)x-a}{x^2}=\dfrac{(x-1)(x+a)}{x^2}$. ……1 分

$\because x>0, a\in\mathbf{R}$,

$\therefore$ 当 $a\geqslant 0$ 时，$x+a>0$，函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调递减，在 $(1,+\infty)$ 内单调递增； ……2 分

当 $-1<a<0$ 时，$0<-a<1$，函数 $f(x)$ 在 $(0,-a)$ 内单调递增，在 $(-a,1)$ 内单调递减，在 $(1,+\infty)$ 内单调递增； ……3 分

当 $a=-1$ 时，$f'(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x^2}\geqslant 0$，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递增； ……4 分

当 $a<-1$ 时，$-a>1$，函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调递增，在 $(1,-a)$ 内单调递减，在 $(-a,+\infty)$ 内单调递增. ……5 分

(Ⅱ)当 $a<-1$ 时，由(Ⅰ)得，函数 $f(x)$ 在 $(1,-a)$ 内单调递减，在 $(-a,+\infty)$ 内单调递增. 函数 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 内的最小值为 $f(-a)=(a-1)\ln(-a)-a-1$. ……6 分

欲证不等式 $f(x)>-a-a^2$ 成立，即证 $-a-a^2<(a-1)\ln(-a)-a-1$，
即证 $a^2+(a-1)\ln(-a)-1>0$. ……7 分

$\because a<-1$，$\therefore$ 只需证 $\ln(-a)<-a-1$. ……8 分

令 $h(x)=\ln x-x+1(x\geqslant 1)$. $\because h'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{-(x-1)}{x}\leqslant 0$,

$\therefore$ 函数 $h(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 内单调递减，$h(x)\leqslant h(1)=0$. ……10 分

$\because a<-1$，$\therefore -a>1$.

$\therefore h(-a)=\ln(-a)+a+1<0$，即当 $a<-1$ 时，$\ln(-a)<-a-1$ 成立. ……11 分

$\therefore$ 当 $a<-1$ 时，$\forall x\in(1,+\infty)$，$f(x)>-a-a^2$. ……12 分

21. **解**：(Ⅰ)由题，$F(1,0)$，令直线 AB：$x=my+1(m\in\mathbf{R})$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

联立 $\begin{cases}x=my+1\\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1\end{cases}$，消去 x，得 $(m^2+2)y^2+2my-1=0$.

$\because \Delta=4m^2+4(m^2+2)>0$，$y_1+y_2=-\dfrac{2m}{m^2+2}$，$y_1y_2=-\dfrac{1}{m^2+2}$， ……2 分

$\therefore |y_1-y_2|=\sqrt{(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\dfrac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{m^2+1}}{m^2+2}$. ……3 分

$\therefore$ 四边形 $OAHB$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}|OH|\cdot|y_1-y_2|=|y_1-y_2|=\dfrac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{m^2+1}}{m^2+2}$. ……4 分

令 $\sqrt{m^2+1}=t$，$\therefore t\geqslant 1$，$\therefore S=\dfrac{2\sqrt{2}t}{t^2+1}=\dfrac{2\sqrt{2}}{t+\dfrac{1}{t}}$.

$\because t+\dfrac{1}{t}\geqslant 2$(当且仅当 $t=1$ 即 $m=0$ 时取等号)，$\therefore 0<S\leqslant\sqrt{2}$. ……5 分

$\therefore$ 四边形 $OAHB$ 面积的取值范围为 $(0,\sqrt{2}]$. ……6 分

(Ⅱ) $\because B(x_2,y_2)$，$D(2,y_1)$，$\therefore$ 直线 BD 的斜率 $k=\dfrac{y_1-y_2}{2-x_2}$.

∴直线 BD 的方程为 $y-y_1=\dfrac{y_1-y_2}{2-x_2}(x-2)$. ……7 分

令 $y=0$,得 $x=\dfrac{x_2y_1-2y_2}{y_1-y_2}=\dfrac{my_1y_2+y_1-2y_2}{y_1-y_2}$. ……① ……9 分

由(Ⅰ),$y_1+y_2=-\dfrac{2m}{m^2+2}$,$y_1y_2=-\dfrac{1}{m^2+2}$,∴ $y_1+y_2=2my_1y_2$. ……10 分

化简①,得 $x=\dfrac{\frac{1}{2}(y_1+y_2)+y_1-2y_2}{y_1-y_2}=\dfrac{\frac{3}{2}(y_1-y_2)}{y_1-y_2}=\dfrac{3}{2}$. ……11 分

∴直线 BD 过定点 $E(\dfrac{3}{2},0)$. ……12 分

22. **解**:(Ⅰ)由题,知点 Q 的轨迹是以$(2,0)$为圆心,2 为半径的圆. ……2 分

∴曲线 C_2 的方程为$(x-2)^2+y^2=4$. ……3 分

∵ $\rho^2=x^2+y^2$,$x=\rho\cos\theta$,$y=\rho\sin\theta$,

∴曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho=4\sin\theta$, ……4 分

曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho=4\cos\theta$. ……5 分

(Ⅱ)在极坐标系中,设点 A,B 的极径分别为ρ_1,ρ_2.

∴ $|AB|=|\rho_1-\rho_2|=4\left|\sin\dfrac{\pi}{6}-\cos\dfrac{\pi}{6}\right|=2(\sqrt{3}-1)$. ……7 分

又∵点 $M(3,\dfrac{\pi}{2})$ 到射线 $\theta=\dfrac{\pi}{6}(\rho\geqslant 0)$ 的距离为 $h=3\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. ……9 分

∴ $\triangle MAB$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}|AB|\cdot h=\dfrac{9-3\sqrt{3}}{2}$. ……10 分

23. **解**:(Ⅰ)原不等式化为 $|x-3|\geqslant 4-|2x+1|$,即 $|2x+1|+|x-3|\geqslant 4$.
……1 分

当 $x\leqslant -\dfrac{1}{2}$ 时,不等式化为 $-2x-1-x+3\geqslant 4$,解得 $x\leqslant -\dfrac{2}{3}$,故 $x\leqslant -\dfrac{2}{3}$;
……2 分

当 $-\dfrac{1}{2}<x<3$ 时,不等式化为 $2x+1-x+3\geqslant 4$,解得 $x\geqslant 0$,故 $0\leqslant x<3$;
……3 分

当 $x\geqslant 3$ 时,不等式化为 $2x+1+x-3\geqslant 4$,解得 $x\geqslant 2$,故 $x\geqslant 3$. ……4 分

∴原不等式的解集为 $\{x\mid x\leqslant -\dfrac{2}{3}$ 或 $x\geqslant 0\}$. ……5 分

(Ⅱ)∵ $f(x)=|x-3|$,

∴ $\left|x+\dfrac{3}{2}\right|-f(x)=\left|x+\dfrac{3}{2}\right|-|x-3|\leqslant\left|(x+\dfrac{3}{2})-(x-3)\right|=\dfrac{9}{2}$,

当且仅当 $(x+\dfrac{3}{2})(x-3)\geqslant 0$ 且 $\left|x+\dfrac{3}{2}\right|\geqslant|x-3|$ 时取等号. ……7 分

又∵ $\dfrac{1}{m}+\dfrac{4}{n}=2(m>0,n>0)$,

∴ $m+n=\dfrac{1}{2}(m+n)(\dfrac{1}{m}+\dfrac{4}{n})=\dfrac{1}{2}(5+\dfrac{n}{m}+\dfrac{4m}{n})\geqslant\dfrac{1}{2}(5+2\sqrt{\dfrac{n}{m}\cdot\dfrac{4m}{n}})=\dfrac{9}{2}$,

当且仅当 $\dfrac{n}{m}=\dfrac{4m}{n}$ 时取等号. ……9 分

∴ $m+n\geqslant\left|x+\dfrac{3}{2}\right|-f(x)$ 成立. ……10 分